TERCERA PARTE

ANALISIS

Vamos a ocuparnos ahora de algunos *capítulos importantes del Análisis considerados desde nuestro punto de vista* y análogamente a lo que hemos hecho con la Aritmética y el Algebra. Lo más importante será hablar de las llamadas *funciones transcendentes elementales,* que ya en la enseñanza secundaria desempeñan un gran papel y son : *la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas.* Comenzaremos por las dos primeras.

I. EL LOGARITMO Y LA FUNCION EXPONENCIAL

Ante todo vamos a recordar brevemente la marcha que se sigue en la enseñanza elemental y la generalización que después se hace en el llamado *Análisis algebraico.*

1. Sistemática del Análisis algebraico

Se parte aquí de la *potencia* $a=b^c$ y se procede a su generalización, pasando sucesivamente *del exponente natural* c *al entero negativo, de éste al fraccionario y finalmente, con ciertas restricciones, al irracional* ; con lo cual el *concepto de raíz* queda unido al concepto general de potencia. Sin entrar en pormenores sobre la potencia, recordemos solamente la *regla de la multiplicación* :

$$b^c \cdot b^{c'} = b^{c+c'}.$$

la cual reduce la multiplicación de dos números a la adición de exponentes. La posibilidad de tal reducción, que como se sabe es el fundamento del *cálculo logarítmico,* hállase basada formalmente en la coincidencia de las leyes formales de la multiplicación y de la adición, ya que una y otra son conmutativas y asociativas

La operación inversa de la potenciación nos da el logaritmo: *Se dice que el número* c *es el logaritmo de* a *en el sistema de base* b:

$$c = \log_b a$$

De esta definición se desprenden ya una serie de *dificultades intrínsecas* sobre las cuales suele pasarse de largo, sin pretender superarlas, por cuya razón vamos a detenernos en su examen para desvanecerlas completamente.

Para ello, será más cómodo considerar a y c, cuya dependencia mutua queremos investigar, como variables, introduciendo para representarlas los símbolos corrientes x e y, con lo cual nuestras ecuaciones fundamentales serán:

$$x = b^y, \qquad y = \log_b x$$

Supondremos que b es siempre positivo; pues si fuese negativo, para valores enteros de y tomaría x valores alternativamente positivos y negativos, y para valores fraccionarios de y valores en general imaginarios y *el conjunto de estos pares de valores de* x *e* y, *no podrían formar una rama continua de curva.* Aun suponiendo $b>0$, es preciso *establecer, aunque no se diga expresamente, algún convenio*; pues para un valor fraccionario de $y = \frac{m}{n}$ (donde m y n son primos entre sí) es sabido que $x = b^{\frac{m}{n}}$ se define como $\sqrt[n]{b^m}$ y estas raíces tienen n *valores,* y aun limitándonos a los números *reales,* para el caso de n par habría *dos valores.* El convenio a que nos referimos es que *se tomará siempre para valor de* x *la raíz positiva,* que suele llamarse *determinación aritmética o valor principal* de la raíz.

El alcance y las ventajas de este convenio se ponen en evidencia acudiendo a la curva logarítmica, representación gráfica de $y = \log x$ (fig. 50).

Cuando y recorre el conjunto denso en todas partes de los números racionales, los valores principales de x forman un conjunto de puntos, denso en todas partes, sobre la curva. Si, además, marcásemos los valores negativos de x, correspondientes a denominadores pares de y obtendríamos un conjunto de puntos siempre *denso en todas partes,* pero que se podría calificar de *semidenso* con respecto al anterior, y situado en la curva simétrica de aquella respecto del eje de las y, representada por la ecuación $y = \log(-x)$. A primera vista, no se percibe la razón de por qué cuando se admite toda clase de valores reales, incluso los irracionales, los valores principales de x formen una curva continua absolutamente regular, y si ocurre lo mismo, o la razón

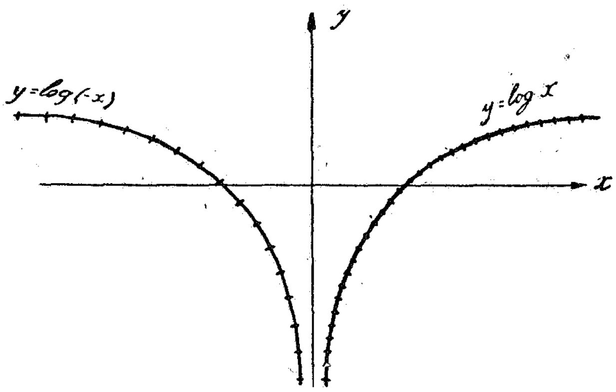

Figura 50

de que no ocurra, con los valores negativos de x. Más adelante veremos que esto sólo puede comprenderse recurriendo a conceptos de la teoría de funciones que no caben en la enseñanza elemental, por lo cual se renuncia en ella a la explicación total de la cuestión, conformándose de ordinario con establecer el convenio autoritario, que al alumno le parece natural, de *suponer siempre* $b > 0$ *y no tener en cuenta más que los valores principales positivos, siendo inadmisible todo lo demás*; basándose en esto se establece en seguida el teorema de que *el logaritmo es una función uniforme definida sólo para argumentos positivos.*

Se ha desarrollado y extendido mucho el conocimiento de los logaritmos, hasta el punto de que los alumnos manejan ya las *tablas de logaritmos* y de ellas se sirven para el cálculo práctico; pero todavía hay establecimientos de enseñanza (en mi tiempo era esto lo ordinario) en que apenas se dice nada de cómo se construyen tales tablas. No podemos menos de condenar este hecho inspirado en el más bajo utilitarismo y contrario a todo principio de elevada pedagogía. Felizmente, hoy ya en casi todas partes se habla del *cálculo logarítmico* y para servir a este fin en muchas escuelas se trata la *teoría de los logaritmos naturales* y de los *desarrollos en serie.*

En lo que respecta a la primera, la base del sistema de logaritmos naturales o neperianos es, como se sabe:

$$e = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818 \ldots$$

En la mayor parte de los libros, siguiendo un patrón francés, se pone esta definición del número e, sin justificación ni explicación alguna, como base de la teoría, con lo cual se omite precisamente lo más característico y necesario para la mejor inteligencia de la cuestión: *la razón de por qué se emplea este notable valor límite como base, y por qué se les llama naturales a los logaritmos así obtenidos.*

Con la misma falta de justificación aparece frecuentemente el desarrollo potencial; se escribe sencillamente:

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots ;$$

y se calculan los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... utilizando las conocidas propiedades del logaritmo y se hace ver la convergencia de esta serie para todos los valores de x tales que $|x| < 1$. Con esta manera de proceder queda completamente en el aire por qué *una función determinada de modo tan arbitrario como el logaritmo, según la definición dada en la enseñanza secundaria, puede ser desarrollada en serie de potencias.*

2. Desarrollo histórico de la Teoría

Vamos a buscar, ahora, *todas las conexiones íntimas* que aquí echamos de menos y a ver las razones fundamentales que explican el por qué aquellas definiciones aparentemente arbitrarias tienen que conducir a resultados lógicos y satisfactorios. Brevemente dicho: *si se quiere comprender bien en toda su extensión la teoría de los logaritmos, lo mejor es examinar a grandes rasgos su desarrollo histórico*; veremos así que lejos de corresponder a lo que indica la marcha antes apuntada, seguida en la enseñanza, parece como si éste fuese una proyección tomada desde un punto de vista inconveniente.

Aparece en primer término en este proceso histórico, en el siglo XVI, un matemático alemán, el suavo *Miguel Stifel* que publicó en Nuremberg su *Arithmetica integra* el año 1544; por consiguiente en los primeros tiempos del Algebra actual, un año antes de que *Cardano* publicase también, en Nuremberg, su obra ya mencionada.

En esta obra, que como la mayor parte de las que más adelante se irán citando, puede verse en la completísima Biblioteca de la Universidad de Gotinga, se encuentra por primera vez el *cálculo con potencias de exponente racional cualquiera* y, en particular, la *regla de la multiplicación*. Stifel da también (página 250) *la primera tabla de logaritmos* que existe, siquiera sea muy *rudimentaria;* contiene solamente los números enteros desde —3 hasta 6, como exponentes, colocados al lado de las correspondientes potencias de 2, desde $\frac{1}{8}$ hasta 64. Parece que Stifel se dió clara cuenta de la importancia de la teoría que así se iniciaba, pues observa que podría escribirse un libro entero que tratase exclusivamente de estas notables relaciones numéricas.

Para hacer realmente aplicables los logaritmos al *cálculo numérico,* le faltaba a Stifel todavía un medio auxiliar importante, las *fracciones decimales*; y sólo cuando se conocieron éstas —*después del año 1600*—, hubo *la posibilidad de construir unas verdaderas tablas de logaritmos.*

Las primeras tablas se deben al escocés *Juan Napier* (o *Neper*) que vivió en los años 1550-1617; aparecieron por el año 1614 *en Edimburgo*, bajo el título: «*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*», y el entusiasmo que despertaron puede colegirse de los sugestivos versos que a modo de preámbulo les precedían, en los que diferentes autores ensalzaban la excelencia de los logaritmos. Por lo demás, el procedimiento de Neper para el cálculo de logaritmos sólo fué publicado después de su muerte, en 1619, con el título «*Mirifici logarithmorum canonis constructio*» (1).

Independientemente de Neper, el suizo *Jobst Bürgi* (1552-1632) había calculado una tabla que publicó en *Praga en el año 1620*, con el título «*Arithmetische und geometrische Progresstabuln*». Nosotros los de Gotinga, consideramos a Bürgi casi como un compatriota; puesto que vivió largo tiempo en *Cassel*. Se puede decir que Cassel y en particular su antiguo observatorio, fué población de importancia extraordinaria para la Ciencia por el desarrollo que en ella tuvieron la Aritmética, Astronomía y Optica anteriores al descubrimiento del Cálculo infinitesimal, de igual modo que lo fué más tarde Hannover como residencia de Leibniz. Tenemos, pues, en las inmediaciones de Gotinga, mucho antes de la fundación de la Universidad, lugares de importancia histórica para la ciencia matemática.

Es muy instructivo comparar entre sí los dos *procesos mentales de Neper y Bürgi*. Ambos parten de los valores de $x=b^y$ correspondientes a *valores enteros de y*; y los disponen de modo que las diferencias entre los valores sucesivos de los números x sean lo menores posible, para lograr en la mayor medida el fin de hacer corresponder a cada número x un logaritmo, cosa a la que hoy se llega ya en la enseñanza secundaria, dando a y los valores fraccionarios de que antes se habló. Neper y Bürgi eluden todas las dificultades que siguiendo este camino se presentan y llevan a feliz término su obra con la intuición del genio, mediante *la sencilla y feliz idea de elegir la base* b *muy próxima a la unidad, con lo cual se logra, en efecto, que las sucesivas potencias de* b *difieran muy poco entre sí*. Bürgi tomó el valor de $b=1{,}0001$, mientras Neper utiliza un valor *menor* que la unidad, el $b=1-0{,}0000001=0{,}9999999$, por consiguiente más próximo todavía a la unidad que el de Bürgi. La razón de esta divergencia entre Neper y lo que hoy es de uso corriente, está en que a Neper le preocupaba la *aplicación al cálculo trigonométrico*, y quería ante todo obtener *logaritmos de fracciones propias* (seno y coseno), los cuales son negativos para $b>1$, y positivos para $b<1$. Ambos investigadores tienen

(1) Lugduni, 1620. Hay una reproducción fototipográfica, hecha en París en 1895.

de común la idea fundamental *de emplear solamente potencias de exponente entero de* b *y, por lo tanto, eludieron completamente la multiformidad que de otro modo aparecería.*

Calculemos, ahora, en el *sistema de logaritmos de Bürgi,* las potencias correspondientes a dos valores consecutivos del exponente, y e $y+1$:

$$x=(1.0001)^y, \quad x+\Delta y=(1{,}0001)^{y+1};$$

por sustracción, se deduce

$$\Delta x=(1{,}000)^y(1{,}0001-1)=\frac{x}{10^4}$$

y si escribimos en lugar de la diferencia 1 de los exponentes la expresión más general Δy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{10^4}{x}. \qquad [1\,a)$$

Tenemos, así, una *ecuación de diferencias para el sistema de logaritmos de Bürgi,* que éste mismo aplicó para el cálculo de su tabla. *Una vez determinado el valor de* x *correspondiente a un valor de* y, *obtiene el que corresponde al siguiente,* y + 1, *por adición a* x *de* $\frac{x}{10^4}$.

De igual modo se deduce que *los logaritmos neperianos satisfacen a la ecuación de diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{10^7}{x}. \qquad [1\,b]$$

Para reconocer la íntima relación entre ambos sistemas, consideremos en lugar de y primero los números $\frac{y}{10^4}$ y después los $-\frac{y}{10^7}$ (lo que equivale a suprimir la coma en la expresión decimal del logaritmo); y designemos los nuevos números también por y; *se obtiene entonces en los dos sistemas la misma ecuación de diferencias:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x} \qquad [2]$$

a la cual satisface una serie de números cuyos valores sucesivos difieren en 0,0001 en el primer caso, y en —0,0000001 en el segundo.

Para mayor comodidad supongamos trazada la curva gráfica de la función exponencial (fig. 51); los pares de puntos (x, y) en

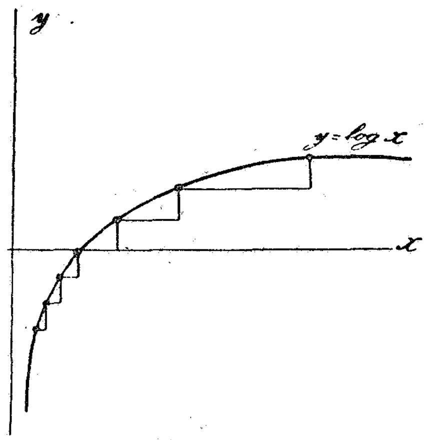

Figura 51

los sistemas de Neper y Bürgi aparecen ante nuestra vista como *vértices de una línea quebrada inscrita en la curva exponencial*

$$x = (1{,}0001)^{10000\,y} \quad \text{y} \quad x = (0{,}9999999)^{10000000\,y}$$

respectivamente, formándose escalones que tienen altura constante $\Delta y = 0{,}0001$ *y* $\Delta y = 0{,}0000001$, como se indica en la figura.

Otra interpretación geométrica en que no es preciso el empleo de la curva exponencial, sino que, por el contrario, muestra el camino natural para llegar a ella, se obtiene cuando *sustituímos la ecuación de diferencias* [2] *por la siguiente ecuación sumatoria* (en cierto modo, «integrándola»)

$$y = \mathop{S}_{\xi} \frac{\Delta \xi}{\xi}, \qquad [4]$$

donde se entiende que, en la sumación, ξ crece discontinuamente desde 1 hasta x, de tal manera que el valor correspondiente

$\Delta y = \frac{\Delta \xi}{\xi}$ es constantemente igual a 10^{-4} y -10^{-7}, respectivamente, lo que da $\Delta \xi = \frac{\xi}{10^4}$ y $\Delta \xi = \frac{\xi}{10^7}$.

Este procedimiento se puede expresar muy sencillamente en lenguaje geométrico así (fig. 52): *Se dibuja la hipérbola* $\eta = \frac{1}{\xi}$ *en el plano* (ξ, η) *y se construyen sobre el eje* ξ, *empezando en el punto* $\xi = 1$, *todos los puntos que se suceden según la ley* $\Delta\xi = \frac{\xi}{10^4}$ (suponiendo, como aquí lo hacemos, el caso de Bürgi), *y sobre*

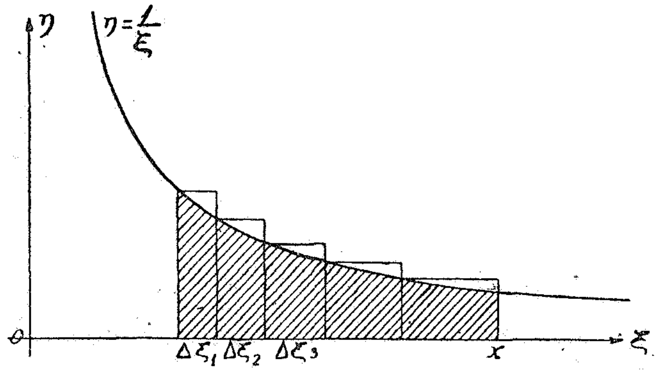

Figura 52

cada uno de los intervalos que así resultan se construyen rectángulos de altura $\frac{1}{\xi}$; cada uno de éstos tiene uno de sus vértices en el punto de la hipérbola de abscisa ξ, y todos ellos tienen el área constante $\Delta \xi \, \frac{1}{\xi} = \frac{1}{10^4}$.

El logaritmo de Bürgi de x *es, según* [4], 10^4 *veces la suma de todos estos rectángulos inscritos en la hipérbola y comprendidos entre* 1 *y* x. Cosa análoga se dice para el sistema de logaritmos neperianos.

Partiendo de esta última interpretación se llega inmediatamente a los logaritmos naturales, sin más que sustituir la suma de rectángulos por el área (rayada en la figura) de la superficie *limitada por la hipérbola, el eje de las ξ y las ordenadas $\xi=1$ y* $\xi=x$; como es sabido, la fórmula que la expresa es

$$\log \text{nat}.\, x = \int_1^x \frac{d\,\xi}{\xi}.$$

Este fué, en efecto, también el *proceso histórico*, y en el año 1650 se dió este paso decisivo, cuando la Geometría analítica había llegado a ser del acervo común y el cálculo infinitesimal trabajaba en la evaluación de cuadraturas de las curvas conocidas.

Naturalmente, para aceptar esta definición de logaritmos naturales, debemos convencernos, ante todo, de que ξ *realmente posee la propiedad fundamental de que el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores*, o empleando el lenguaje moderno, que la función definida por la cuadratura de la hipérbola

$$f(x) = \int_1^x \frac{d\,\xi}{\xi}$$

satisface al sencillo *teorema de adición*:

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \,.\, x_2).$$

En efecto, al variar x_1 y x_2, las diferenciales de ambos miembros son, por la definición de integral, $\frac{dx}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ y $\frac{d\,(x_1\,x_2)}{x_1\,x_2}$ respectivamente, y como son iguales los dos miembros, deben diferir en una constante, la cual es nula, como se ve cuando ponemos $x_1=1$ (puesto que $f(1)=0$).

Veamos, ahora, cuál debe ser *la «base» de los logaritmos naturales*; basta para ello, observar que el paso de la serie de rectángulos al área de la hipérbola se realiza cuando se toman en el eje de abscisas los puntos tales que $\Delta\,\xi = \frac{\xi}{n}$ en lugar de $\Delta\,\xi = \frac{\xi}{10^4}$, y se hace crecer n infinitamente, lo cual equivale a reemplazar la sucesión de valores de Bürgi $x=(1{,}0001)^{10000y}$ por la $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}$ haciendo que ny tome todos los valores enteros.

Esto, según la definición general de potencia, se expresa diciendo que x es la potencia y-ésima de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; y por lo tanto, parece natural tomar como *base de este sistema de logaritmos el* $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$, valor que es precisamente el que de ordinario toma como definición del número e, al exponer la teoría de estos logaritmos. Por lo demás, es digno de observar que la base de Bürgi $(1{,}0001)^{10000}=2{,}718146$ coincide en sus tres primeras cifras con la expresión decimal del número e.

Vamos, ahora, a considerar el *desarrollo histórico de la teoría de los logaritmos después de Neper y Bürgi*; y en este aspecto hay aquí que observar que

1.° El matemático *Mercator* ya antes mencionado (pág. 118), fué uno de los primeros que se sirvió de la *definición de los logaritmos naturales por el área de la hipérbola*; en su libro «*Logarithmotechnica*» de 1668, así como en algunas memorias publicadas en las *Philosophical Transactions* de la Real Academia de Londres, en los años 1667 y 1668, muestra, razonando del modo que corresponde a lo que en lenguaje moderno acabamos de decir, que $f(x)=\int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$ *sólo difiere de los logaritmos vulgares, o sea de aquéllos cuya base es* 10—*ya entonces utilizados en el cálculo—en un factor constante*, el llamado *módulo del sistema de logaritmos*. Además introdujo la denominación de «*logaritmos naturales*» o también «*logaritmos hiperbólicos*» (1). *La mayor contribución de Mercator* es, sin embargo, *la determinación de la serie logarítmica* que obtuvo *por integración término a término de la serie obtenido por división de* $\frac{1}{x}$, operación que puede considerarse como una de las que abren nuevos horizontes a la investigación matemática, como ya dijimos (pág. 118).

2.° En este mismo lugar hemos referido también cómo Newton, aprovechando estas ideas de Mercator obtuvo dos nuevos e importantes teoremas: el *teorema general del binomio y el método la inversión de las series*. Este último se encuentra ya en un tra-

(1) Philosophical Transaction of the Royal Society of London, III, página 761, 1668.

bajo que corresponde a la época de su juventud «*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*», el cual sólo más tarde fué dado a la imprenta, pero desde 1669 se había propagado por copias manuscritas (1). En él (2) se deduce por primera vez de la serie de Mercator para $y = x$ *por inversión, la serie exponencial*:

$$x = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Como número cuyo logaritmo natural es $y = 1$, resulta de aquí el

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

y entonces puede ya deducirse, utilizando la ecuación funcional del logaritmo, que *para cada valor racional de* y, *en el sentido de la definición ordinaria de potencia, es* x *uno de los valores de* e^y, *precisamente el positivo*, como más tarde tendremos ocasión de ver.

La función y = log nat x *es, por tanto, lo que, en efecto, según la definición ordinaria, se llamaría el logaritmo de* x *de base* e, estando definido e por la serie, no como $\lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

3.° *Un camino más cómodo para deducir la serie exponencial* abrió *Brook Taylor*, después de haber expuesto en su *Methodus incrementorum* (3) el principio general del desarrollo en serie de una función, que lleva su nombre, del cual hablaremos más tarde.

Taylor sólo necesitó utilizar la relación contenida en la definición del logaritmo por medio de la integral:

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

(1) *I. Newton*, Opuscula, Tom. I (Lausannae 1744), op. 1. Primero apareció en 1711.
(2) Loc. cit., pág. 20.
(3) London, 1715.

para obtener la función inversa

$$\frac{de^y}{dy} = e^y$$

y pudo ya escribir la serie exponencial como un caso particular de la serie general estudiada.

Hemos visto ya (pág. 123), cómo a esta *fructífera época* de la evolución matemática siguió la *crítica*, casi se pudiera decir el período de descontento intelectual, en el que ante todo se trataba de dar sólido fundamento a los nuevos resultados obtenidos y eliminar de ellos lo que pudiera haber de falso. Ahora vamos a ver lo que en este sentido hicieron con sus obras *Euler* y *Lagrange* en lo que se refiere a la función exponencial y al logaritmo.

Empecemos con la obra de *Euler* «*Introductio in analysin infinitorum*» (1), señalando por adelantado la *extraordinaria y admirable habilidad analítica* que Euler muestra en todos sus trabajos, en los que, sin embargo, no hay *traza ninguna del rigor* que hoy se acostumbra exigir.

Euler *parte en sus investigaciones del teorema del binomio:*

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1}k + \frac{l(l-1)}{1.2}k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}k^3 + \dots$$

restringido a valores enteros de l; en su *Introductio* no consideraba otra clase de valores de y. Este desarrollo lo aplicaba a la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny}$, suponiendo entero ny; hacía crecer n infinitamente, siempre dentro de esta condición, y efectuaba este *paso al límite en cada uno de los términos de la serie*, con lo cual obtenía la serie exponencial

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

definiendo

$$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(1) Lausanne, 1748, cap. VII, pág. 85 y sig. Puede verse también el tomo VIII de las obras de Euler, editadas bajo la dirección de Rudio, Krazer y Stäckel.

Naturalmente, Euler no se preocupó de justificar el *rigor* de cada uno de estos pasos al límite; por ejemplo, ver si la suma de los límites de los términos de una serie es realmente el límite de la suma de la serie.

Esta manera de deducir la serie exponencial se conserva en sus líneas generales en gran número de tratados de Cálculo infinitesimal; si bien se ha alargado tanto más cuanta más importancia se ha dado a la justificación de cada uno de esos pasos, de que prescindía Euler. Por lo demás, para que se vea el gran influjo que en esta teoría ha ejercido el libro de Euler, basta observar que el uso de la letra e para designar la base del sistema neperiano procede de él: «Ponamus autem brevitatis gratia pronumero hoc 2,71828... constanter litteram e...»; dice en la página 90.

Digamos ya, con esta ocasión, que Euler dedujo *de manera completamente análoga las series del seno y coseno*. Para ello partía del desarrollo de sen φ según las potencias de sen $\frac{\varphi}{n}$ y hacía crecer n infinitamente. Esto se reduce, en realidad, a un paso al límite en la fórmula del binomio, como se ve sin más que utilizar la *fórmula de Moivre:*

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{\varphi}{n}\right)^n \cdot \left(1 + i \operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}\right)^n.$$

Consideremos, ahora, la obra de *Lagrange* «*Théorie des fonctions analytiques*» (1). También aquí es de observar en primer término que las cuestiones de convergencia son tratadas sumamente a la ligera por Lagrange. Ya antes (pág. 120) dijimos que éste *sólo considera funciones definidas por series de potencias* de su argumento y define sus derivadas de un modo puramente formal por las series derivadas de aquéllas. *Para él, pues, la serie de Taylor*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

es, simplemente, el resultado de una transformación formal de la *serie primitiva* $f(x+h)$ ordenada por las potencias crecientes de $x+h$. Por consiguiente, cada vez que aplica esta fórmula a una

(1) París, 1797.—Reproducido en *Lagrange*: Oeuvres, tomo IV, París, 1881. Véase, en particular, el Capítulo III, pág. 34 y siguientes.

función determinada debería demostrar que la función pertenece a las «analíticas», es decir, que se puede desarrollar en serie potencial.

Empieza Lagrange considerando la función $f(x)=x^n$, *para valores racionales de* x, y determina $f'(x)$ como coeficiente de h en el desarrollo de $(x+h)^n$, bastándole calcular los dos primeros términos de este desarrollo. Según la misma ley obtiene $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., apareciendo el *desarrollo binómico de* $(x+h)^n$ como un *caso particular de la serie de Taylor* $f(x+h)$. Por otro lado es digno de observar que Lagrange no trata especialmente el caso del exponente irracional, sino que para él es evidente una vez que ha considerado todos los valores racionales; cosa interesante, cuando se tiene en cuenta el gran cuidado que hoy se presta al paso del exponente racional al irracional.

De modo análogo procede Lagrange al tratar la función $f(x)=(1+b)^x$; ordena el desarrollo binómico de la función $(1+b)^{x+h}$ según las potencias de h, halla $f'(x)$ como coeficiente de h; y siguiendo la misma ley $f''(x)$, $f'''(x)$, ... y así llega, formalmente, a la serie de Taylor para $f(x+h)=(1+b)^{x+h}$, de la que, poniendo $x=0$, obtiene la *serie exponencial buscada*.

Terminaremos esta rápida ojeada histórica, en la que no hemos citado, naturalmente, más que los nombres más famosos, exponiendo brevemente lo *que el siglo* XIX *ha aportado como nuevas contribuciones fundamentales*.

En primer lugar es de mencionar:

1.° *La formación de definiciones y conceptos rigurosos sobre la convergencia de las series y de otros procesos infinitos*. Figura en primer término *Gauss* con su *Abhandlung über die hypergeometrische Reihe*, en 1812 («Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{a\cdot b}{1\,.\,c}x+\ldots$) (1); sigue *Abel* con su trabajo sobre la serie binómica, en 1824 (*Untersuchungen über die binomische Reihe* $1+\binom{m}{1}x+\binom{m}{2}x^2+\ldots$) (2); en tanto que Cauchy, en el

(1) Commentationes societatis regiae Gottingiensis recentiores. Vol. II, 1813, pág. 1-46. = Werke, Bd. III, pág. 123-162. Trad. alemana de Simon, Berlín, 1888.

(2) Crelles *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Tomo I (1826), pág. 311-339 = Ostwalds Klassiker, núm. 71.

año 20, en su *Cours d'Analyse* (1), *expone, por vez primera, consideraciones generales sobre la convergencia de las series*. El resultado de estos trabajos, para las series aquí consideradas, es que *todos los resultados anteriores son verdaderos en el campo de convergencia, si bien las demostraciones exactas para ellos serían muy complicadas.*

Puede verse una exposición completa de tales demostraciones en forma moderna, en el *Algebraische Analysis* de *Burkhardt* o en el libro ya mencionado de *Weber-Wellstein* (2).

2.° Aunque más tarde tendremos que hablar circunstanciadamente de ello, debemos aquí mencionar la *fundamentación exacta y rigurosa del Cálculo infinitesimal por Cauchy; por él se ha llegado a dar completa exactitud matemática a la teoría de logaritmos, fundada el siglo* XVII *por Bürgi y Neper.*

3.° Por último, es de citar aquí el nacimiento de una teoría, suficiente por sí sola para la completa comprensión de las funciones logarítmica y exponencial, la *teoría de funciones de variable compleja,* llamada frecuentemente, para abreviar, *teoría de funciones*. Guss fué también quien vió primero los principales fundamentos de esta teoría, aun cuando poco o casi nada publicó sobre ella. Para nosotros es sobre todo interesante *una carta a Bessel de 18 de diciembre de 1811,* que fué publicada mucho más tarde (3), en la que se trata con admirable claridad de la *significación de la integral* $\int_1^x \frac{dz}{z}$ *en el plano complejo,* y se explica cómo representa una *función infinitiforme.*

La gloria de haber creado la teoría de las funciones de variable compleja, independiente de otra disciplina, y de haberla dado primero a conocer, corresponde, por lo demás, a *Cauchy.*

El resultado de estas observaciones relativas a los comienzos del siglo XIX puede resumirse diciendo que *la introducción de los logaritmos naturales partiendo de la cuadratura de la hipérbola tiene el mismo rigor que cualquier otro método, con la ventaja,*

(1) Première partie, *Analyse algébrique.* París, 1821. = *Oeuvres,* Serie II, t. III. París, 1897.

(2) Puede verse también, p. ej.: Rey Pastor, *Teoría de funciones reales,* Madrid, 1922.

(3) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, herausgegeben von Auwers, Berlín, 1880. También Gauss Werke, tomo VIII, 1900, pág. 90.

como ya hemos visto, de superar a todos los demás en sencillez e intuición.

3. Algo sobre la enseñanza de la teoría de logaritmos

Es indudable que este desarrollo moderno ha pasado de un modo extraño por la enseñanza secundaria sin dejar ninguna huella en lo fundamental, como repetidas veces hemos señalado. A pesar de todas las dificultades y todos los inconvenientes, todavía hoy se recurre en aquella enseñanza al *Análisis algebraico y se elude todo empleo del Cálculo infinitesimal,* no obstante haber desaparecido hace bastante tiempo el recelo que esta disciplina despertara en el siglo XVIII. La razón de ello hay que buscarla en que *el incesante progreso de la Matemática en el siglo* XIX *se ha realizado sin establecer el menor contacto con la enseñanza matemática secundaria,* cosa tanto más rara, cuanto que ya en los primeros decenios de este siglo empezó la formación específicamente matemática de los candidatos al magisterio. Ya hemos dicho en la introducción que esta *discontinuidad* es la que impide toda reforma en la enseñanza tradicional. Se preocupan muy poco en la enseñanza secundaria de cómo puede la enseñanza superior seguir construyendo sobre la base que aquella le proporciona, y las más de las veces se conforman con definiciones que por el momento quizá basten, pero que nada significan frente al cúmulo de necesidades de la enseñanza superior. Y, recíprocamente, es corriente que la enseñanza superior no se cuide de apoyarse en lo dado ya en la secundaria, sino que construya sus sistemas propios sin otro enlace con lo anterior que la indicación, no siempre acertada y frecuente: «Esto ya ha sido visto en la segunda enseñanza».

Hay que reconocer, sin embargo, que no siempre acontece esto; hay profesores universitarios que al dar sus lecciones a naturalistas y técnicos, *basándose en su experiencia han adoptado la introducción de los logaritmos de modo muy parecido al que venimos recomendando.* Citemos a este respecto la obra de *Scheffers, «Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik»* (1); en ella, en los capítulos VI y VII,

(1) Leipzig, 1905. 5.ª ed., 1921.

se expone una teoría completa del logaritmo y de la función exponencial que coincide con la bosquejada en las páginas anteriores, y en el capítulo VIII se da una teoría semejante de las funciones trigonométricas. Recomendamos al lector la lectura de esta obra, muy apropiada para el uso a que se destina, de lectura muy cómoda y fácilmente accesible hasta para las inteligencias medianas. En ella se pone de relieve la gran *habilidad pedagógica* de Scheffers, por ejemplo, en la teoría de los logaritmos haciendo ver cuán pocas son las nuevas fórmulas que hay que aprender de memoria ua vez *comprendido* todo lo demás, porque entonces, cuando hacen falta, se deducen inmediatamete ; lo cual anima al lector a seguir el estudio a pesar de la aparente muchedumbre de nuevos resultados. Digamos también, por lo que hace a las conexiones que venimos examinando, que Scheffers supone conocida toda la exposición elemental, pero construye la suya con total independencia de aquélla, suponiendo que la mayoría de aquella ha sido olvidada ; no lleva, sin embargo, la obra a que nos referimos la menor intención de proponer planes de reforma en la enseñanza secundaria, contrariamente a lo que ocurre en nosotros.

Vamos, ahora, a exponer concisamente el modo como creemos debería hacerse la *introducción de los logaritmos en la enseñanza, siguiendo el camino más natural y sencillo: el concepto fundamental, la fuente de donde se deriva ésta introducción de nuevas funciones es la cuadratura de curvas conocidas.* Esto corresponde, como ya hemos visto, de una parte al *proceso histórico,* pero también de otra al *procedimiento seguido en las regiones superiores de la matemática,* como ocurre, pór ejemplo, con las funciones elípticas.

Siguiendo este principio general, partiremos, ahora, de la *hipérbola* $\eta = \frac{1}{\xi}$ y designaremos *el área de la superficie limitada por la curva, las ordenadas correspondientes a* $\xi = 1$, $\xi = x$ *y el eje de las* x *como logaritmo de* x. Cuando la ordenada extrema varía, la representación geométrica permite ver fácilmente la variación experimentada por el área ; y por consiguiente, se puede dibujar (fig. 53) aproximadamente la curva $\eta = \log \xi$.

Para llegr a la *ecuación funcional* del logaritmo del modo más sencillo posible, partiremos de la relación:

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_c^{cx} \frac{d\xi}{\xi}$$

que se deduce por la transformación $c\xi = \xi'$ de la variable de integración; es decir, *el área comprendida entre las ordenadas* 1 *y* x *es la misma que la comprendida entre las ordenadas* c *y* cx.

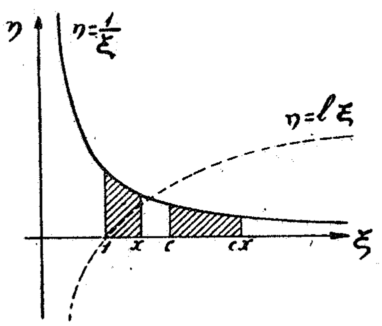

Figura 53

Este hecho tiene una sencilla traducción geométrica, observando que *la magnitud de esta área debe quedar invariable, ya que al trasladarse a lo largo de la hipérbola, en la misma razón en que aumenta su base se reduce su altura.* De este teorema se deduce en seguida el teorema de adición:

$$\int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_1^{x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{x_1}^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^{x_1 x_2} \frac{d\xi}{\xi}.$$

Sería muy de desear que se comprobase lo práctico de este modo de proceder en la enseñanza; en cuanto a los pormenores de cómo deba realizarse, es problema que debe resolver naturalmente el profesor experimentado. En el plan de enseñanza de Meran no nos hemos atrevido todavía a proponer este camino como norma.

4. Punto de vista de la Teoría de funciones

Veamos, por último, de qué manera se tratan los logaritmos en la moderna teoría de funciones, en la cual quedan satisfactoriamente aclaradas las dificultades presentadas ya anteriormente.

Introduciremos, desde ahora en adelante, en lugar de y y x las variables complejas $w=u+iv$ y $z=x+iy$. Entonces:

1.° *El logaritmo se define por la integral*

$$w = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad [1]$$

en la cual la trayectoria de integración (fig. 54) es una línea cual-

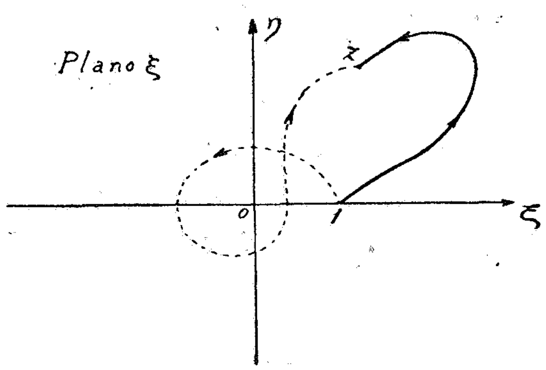

Figura 54

quiera del plano complejo ζ que va del punto $\zeta=1$ al $\zeta=z$ del plano ζ.

2.° Según que la trayectoria de integración no rodee el punto $\xi=0$, o lo haga una, dos, ..., veces, así toma la integral *infinitos valores, todos ellos distintos*. Uno de estos valores, el llamado *valor principal*, $[\log z]$, queda determinado cuando se corta el plano a lo largo del semieje real negativo y se supone que el camino de integración no atraviesa este corte; queda con ello solo un grado de arbitrariedad, si se llega a los valores reales negativos sólo por encima o debajo del eje ζ, y según el convenio que se establezca, la parte imaginaria del logaritmo será

$+i\pi$ ó $-i\pi$. *Del valor principal se deduce el valor general del logaritmo agregándole un múltiplo cualquiera de* $2i\pi$:

$$\log z = [\log z] + 2ki\pi \quad (k=0, +1, +2, \ldots) \qquad [2]$$

3.° De la definición del logaritmo por medio de la integral se sigue que *la función inversa* $z = f(w)$ *satisface a la ecuación diferencial*

$$\frac{df}{dw} = f, \qquad [3]$$

de la cual se deduce inmediatamente el *desarrollo de* f *en serie de potencias:*

$$z = f(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \ldots$$

Puesto que esta serie es convergente para todo valor finito de w, resulta que *la función inversa es una función uniforme, que sólo es singular para* $w = \infty$; por lo tanto, es una *función transcendente «entera».*

4.° Exactamente como en el campo real, se puede deducir de la definición integral el *teorema de adición del logaritmo.* De éste se sigue para la función inversa la ecuación:

$$f(w_1) \cdot f(w_2) = f(w_1 + w_2). \qquad [4]$$

También de la [2] se deduce:

$$f(w + 2ki\pi) = f(w) \quad (k=0, +1, +2, \ldots), \qquad [5]$$

es decir, $f(w)$ *es una función simplemente periódica, con el período* $2\pi i$.

5.° Sea $f(1) = e$. De la [3] se deduce, entonces, que *para cualquier valor racional* $w = \frac{m}{n}$, *es* $f(w)$ *igual a uno de los* n *valores que, como es sabido, admite la expresión* $\sqrt[n]{e^m}$:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}.$$

Es corriente—y nosotros seguiremos esta costumbre—*designar siempre por* $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ *este valor* $f(w)$, de modo que e^w *es una función uniforme bien determinada*, que coincide con la definida por la relación [3].

6.° Veamos ahora la naturaleza de la función definida del *modo más general por la potencia* b^w, *de base cualquiera*. Los convenios que hayamos de hacer deben ser tales que, naturalmente, sigan verificándose las reglas formales de la potenciación. Con el fin de reducir b^w a la función ya definida e^w, pongamos $b = e^{\log b}$ donde $\log b$ tiene los infinitos valores

$$\log b = [\log b] + 2\,k\,\pi\,i, \qquad (k = 0, \ +1, \ +2, \ldots)$$

tendremos entonces que necesariamente será

$$b^w = \left(e^{\log b}\right)^w = e^{w \log b} = e^{w\,[\log b]}\,e^{2\,k\,\pi\,w\,i}\,(k = 0, +1, +2, \ \ldots)$$

y esta expresión representa, para los diferentes valores de k, *infinitas funciones completamente independientes entre sí*. Tenemos así este notable resultado: que *los valores de la expresión exponencial general* b^w, *tales como resultan de los procesos de la potenciación y radicación, no pertenecen a una función analítica única, sino a infinitas funciones diferentes de* w, *cada una de las cuales es uniforme*.

Los diversos valores de estas funciones satisfacen a diversas relaciones. En particular, son todos ellos *iguales, cuando* w *es un número natural*, y sólo hay *un número finito* n *de valores, si* w *es un número racional de la forma* $\frac{m}{n}$, siendo m y n primos entre sí; estos valores son

$$e^{\frac{m}{n}[\log b]} \, . \, e^{2\,k\,\pi\,i\,\frac{m}{n}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ \ldots \ n - 1)$$

por consiguiente, como debía ser, los n valores de $\sqrt[n]{b^m}$.

7.° Ahora es cuando podemos comprender bien cuán *inadecuada es la sistematización* ordinaria, en la cual se pretende llegar a la función exponencial uniforme partiendo de la potenciación y radicación; necesariamente conduce a un *laberinto*, del cual es imposible salir no utilizando otros recursos que los llamados «elementales» en los que únicamente intervienen magnitudes reales. Esto se comprende claramente, cuando, partiendo del concepto general establecido, se observa lo que sucede en el caso de ser b *negativo;* señalemos ya con este motivo la ventaja de la *definición del valor principal* ($b>0$ y $b^{\frac{m}{n}}>0$; véase página 214); que parecía arbitraria; tal definición de los *valores de una de las infinitas funciones*, a saber, de la

$$[b^w] = e^{w\,[\log b]}$$

Por el contrario, los valores reales negativos de $b^{\frac{m}{n}}$ cuando n es par, que forman también un conjunto denso en todas partes, pertenecen a *diversas de las infinitas funciones consideradas;* y, por consiguiente, no pueden estar contenidos en una curva analítica continua.

Penetrando aun más en el fondo de la cuestión, agregaremos algunas *observaciones acerca de la naturaleza teórico funcional del logaritmo*. Puesto que $w = \log z$ en cada vuelta alrededor del punto $z=0$ experimenta un incremento aditivo de $2\pi i$, la superficie de Riemann correspondiente, que es de infinitas hojas, tiene en $z=0$ un *punto de ramificación de orden infinito*, de tal suerte que en toda vuelta se pasa de una hoja a la siguiente; se reconoce fácilmente, recurriendo a la esfera de Riemann, que $z=\infty$ *es un segundo punto de ramificación de la superficie exactamente de la misma naturaleza que aquél*, no existiendo ya ninguno más. Podemos hacer ahora intuitivo lo que se llama la *fuerza uniformizante del logaritmo* y de la cual ya hemos antes hablado con motivo de la solución de ciertas ecuaciones algebraicas (pág. 198 y siguientes).

Para fijar las ideas, supongamos que se tiene una *potencia racional* $z^{\frac{m}{n}}$; por ser

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z}$$

la potencia será una función uniforme de $w = \log z$; se puede, por lo tanto, decir que *se ha uniformado por el logaritmo*. Para comprender esto, imaginemos extendida sobre el plano z, además de la superficie de Riemann del logaritmo, la de $z^{\frac{m}{n}}$, la cual es una superficie de n hojas, cuyos puntos de ramificación son también los $z=0$ y $z=\infty$, en cada uno de los cuales se unen las n hojas en ciclo.

Consideremos ahora una línea cerrada cualquiera en el plano z (fig. 55) sobre la cual vuelve el logaritmo a tomar el valor

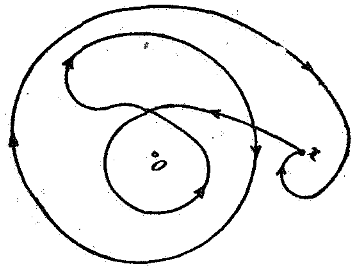

Figura 55

que tenía en su punto de partida, que, por consiguiente, será cerrada en la superficie de Riemann de infinitas hojas; y se ve fácilmente que también debe quedar cerrada cuando se la representa sobre la superficie de n hojas de $z^{\frac{m}{n}}$.

De esta sencilla consideración geométrica resulta inmediatamente que $z^{\frac{m}{n}}$ vuelve a tomar siempre el valor inicial cuando lo hace $\log z$, y, en consecuencia, es una función uniforme del logaritmo. Hacemos aquí estas breves indicaciones con tanto mayor gusto, cuanto que el caso que hemos tratado es el más sencillo del *principio de uniformización*, que tan importante papel desempeña en la moderna teoría de funciones.

Vamos a ver ahora *la naturaleza de la función* $w = \log z$, *mediante la consideración de la representación conforme del plano* z *(o de la superficie de Riemann), sobre el plano* w, prescindiendo, por razón de sencillez, de la consideración, que parece natural, de las esferas correspondientes. Descompondremos, como en otra ocasión, el plano z por el eje real en un semiplano rayado (superior) y uno sin rayar (inferior). Cada uno de estos tiene *infinitas representaciones* sobre el plano w, puesto que $\log z$ es una función infinitiforme; y todas ellas tienen que *sucederse una al lado de otra,* puesto que la función inversa $z=e^w$ es uniforme. De este modo se establece una *división del plano w en fajas paralelas, de anchura π,* limitadas por rectas paralelas al eje real (fig. 56); estas fajas deben estar alternatiamente ra-

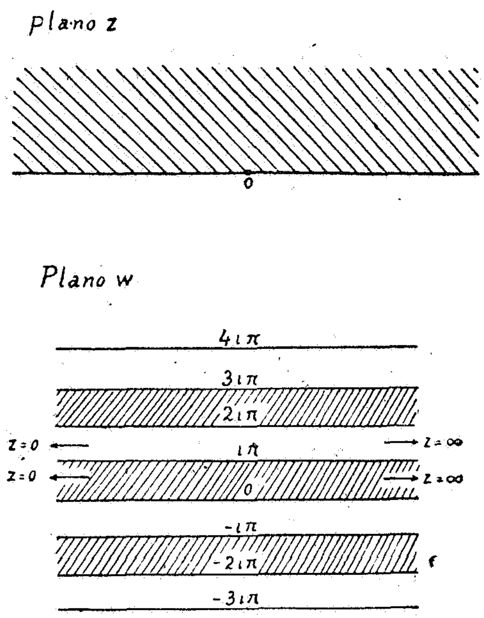

Figura 56

yadas y sin rayar (la primera de encima del eje real se ha rayado) y son, según esto, representación conforme, alternativamente, del semiplano superior y del inferior del plano z, en tanto que las paralelas que las limitan corresponden al eje real z. En cuanto al modo de ser de la correspondencia, obsérvese que z *siempre tiende hacia* 0, *cuando w tiende hacia ∞ por la izquierda* sin salir del interior de una faja; en tanto que z *tiende a* ∞

cuando w *se aleja infinitamente por la derecha; en* $w=\infty$ *la función* e^w *tiene un punto singular esencial.*

Este modo de razonar nos da ocasión para referirnos al *teorema de Picard,* uno de los más interesantes de la moderna teoría de funciones. Sea $z(w)$ una *función transcedente entera,* es decir, una función que sólo tiene el punto singular esencial $w=\infty$ (por ejemplo, e^w). La cuestión ahora planteada es averiguar si existen, y, caso afirmativo, cuántos valores de z pueden darse, que no puedan ser alcanzados por la función en ningún punto propio w y a los que sólo puede *aproximarse indefinidamente* $z(w)$ cuando w tiende hacia ∞ de modo conveniente. El *teorema de Picard* expresa que una función en el entorno de un punto singular esencial sólo puede dejar de tomar dos valores diferentes, a lo más; y que, por consiguiente, una función transcendente entera, aparte el valor $z=\infty$, que por definición no puede adquirir, *a lo sumo sólo puede dejar de tomar un valor.* La función e^w es un ejemplo de esto: aparte ∞, sólo deja de adquirir el valor $z=0$; cuando en cada una de las fajas en que hemos descompuesto el plano w, se aproxima e^w a estos dos valores en los pasos al límite indicados, no llega a ser igual a ellos en ningún punto propio. Una función, que fuera de $z=\infty$, toma todos los valores es sen w.

Para terminar, vamos a tratar un punto, tocado ya repetidas veces, utilizando esta representación geométrica; nos referimos al *paso al límite de la potencia a la función exponencial,* que viene sintetizado en la fórmula

$$e^w = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot w}$$

o, poniendo $n\,.\,w=\nu$,

$$e^w \lim_{\nu=\infty}\left(1+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu}.$$

Para ello, consideremos la función antes del paso al límite:

$$f_\nu(w) = \left(1+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu}$$

cuyo comportamiento teórico funcional como potencia nos es bien conocido. Esta función tiene los *puntos singulares* $w = -\nu$ y $w = \infty$, en las cuales se anula la base o se hace infinita, respectivamente, y da la representación conforme sobre el plano w, de los semiplanos $f\nu$ en sectores que tienen el vértice $w = -\nu$ y la amplitud $\frac{\pi}{\nu}$ (fig. 57).

Si el número ν no es entero, la sucesión de los sectores puede cubrir el plano w un número finito o infinito de veces, según

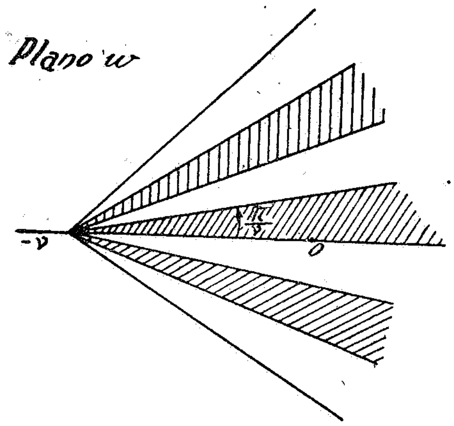

Figura 57

la multiformidad de la función $f\ \nu$. Si ν tiende hacia ∞, el punto $-\nu$, vértice de los sectores, se aleja indefinidamente por la izquierda, y aparece así de modo muy intuitivo *cómo, a medida que $-\nu$ tiende hacia $-\infty$, van transformándose los sectores de la derecha de $-\nu$ en las fajas paralelas del plano w correspondientes a la función límite e^w*. Queda así explicada geométricamente la definición, como límite, de e^w. Un cálculo sencillo permite comprobar que la amplitud de los sectores en el punto $w = 0$ pasa á ser la anchura π de las fajas paralelas.

Una objeción puede, sin embargo, hacerse a este modo de ver: al tender ν de un modo continuo a ∞, no lo hace pasando sólo por valores enteros, sino también por otros racionales e irracionales, para los cuales $f\ \nu$ es *multiforme* y á los que, por consiguiente, corresponden *superficies de Riemann de varias o de infinitas hojas; ¿cómo pueden venir representadas en el plano* *sencillo que corresponde a la función uniforme* e^w? Si, por ejemplo, se hace tender ν hacia ∞, tomando valores fraccionarios de denominador n, a cada $f(w)$ corresponde una superficie de Riemann de n hojas. Para más fácilmente realizar este paso al límite, consideremos, por un momento, la *esfera* w, que para cada $f(w)$ estará recubierta de n hojas unidas en los puntos de ramificación $-\nu$ e ∞; en la figura 58 se ha tomado como corte que los une el arco menor de meridiano que definen. Si ahora hacemos que ν tienda hacia ∞, los dos puntos de ramificación tienden a confundirse y *desaparece el corte que los unia; con lo cual, desaparece igualmente el punto en que venían a juntarse*

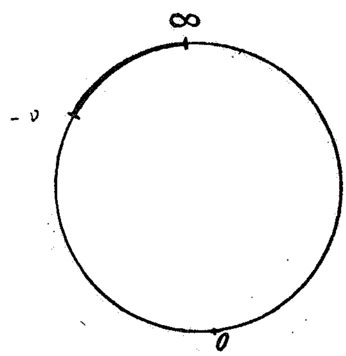

Figura 58

las n *hojas* y aparecen *separadas las* n *hojas* que corresponden a las *n funciones uniformes distintas*, de las cuales sólo una es la e^w.

Si ahora hacemos que ν tome *todos los valores reales*, aparecen, en general, *superifcies de Riemann de infinitas hojas*, cuya conexión desaparece en el límite; *los valores sobre una hoja de cada una de estas superficies convergen hacia la función uniforme* e^w, *cuyos valores están extendidos sobre la esfera lisa; en tanto que las sucesiones de valores sobre las otras hojas no tienen, en general, valores límites*. Con esto aparece completamente esclarecido el notable y ciertamente complicado paso al límite de la potencia multiforme a la función exponencial uniforme.

Como enseñanza general de todas estas últimas consideraciones podemos agregar que *sólo penetrando en el campo com-*

plejo se puede ver claramente el fondo de estas cuestiones. ¿No es esto bastante fundamento para llevar a la enseñanza la teoría de funciones de variable compleja? Así, por ejemplo, cree Max Simon que debe hacerse. Sin embargo, es seguro que no se puede llegar tan lejos, en la generalidad de los casos, en la enseñanza secundaria; por esto, mi opinión es que *en estos estudios deberían abandonarse los métodos usuales y sustituirlos por el muy sencillo y natural que hemos expuesto.* Parece inútil agregar mi vivo deseo de *que el maestro domine completamente todas estas materias relativas a la teoría de funciones, pues debe estar bien impuesto en todos los asuntos que tiene que exponer y, por lo tanto, ha de conocer perfectamente todos los bancos y escollos en que ha de evitar choquen sus discípulos.*

Después de estas detenidas consideraciones, podremos ya exponer con más brevedad, siguiendo método análogo, las funciones goniométricas.

II. FUNCIONES GONIOMETRICAS

Digamos, ante todo, que preferimos este nombre al mucho más corriente de «funciones trigonométricas», porque la *Trigonometría es sólo una aplicación particular de estas funciones, sumamente importantes en toda la Matemática;* sus funciones inversas, que corresponden al logaritmo, del mismo modo que las goniométricas a la exponencial, se llaman *funciones ciclométricas.*

1. Teoría de las funciones goniométricas

La exposición de la teoría de las funciones goniométricas está íntimamente ligada con esta cuestión: ¿cómo se podrían introducir en la enseñanza del modo más natural posible? Me parece lo mejor aplicar el *principio general ya sentado, partir de la cuadratura de superficies;* el procedimiento usual, que empieza con la *medida de arcos,* me parece que no es tan inmediatamente intuitivo y, sobre todo, no tiene la ventaja de poder dominar de un modo sencillo y uniforme tanto los campos elementales como los superiores.

Nos serviremos de nuevo de la Geometría Analítica, comenzando por

1) *El círculo unidad:*

$$x^2+y^2=1.$$

Consideremos el *sector* (fig. 59) formando por los radios corres-

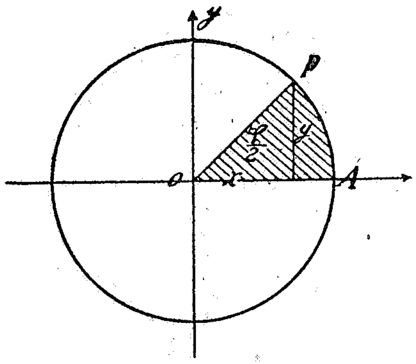

Figura 59

pondientes a los puntos $A(1, 0)$ y $P(x, y)$. Para acomodarnos a las notaciones usuales, designaremos su área por $\frac{\varphi}{2}$ (pues, entonces, el arco, medido en radianes, es $AP=\varphi$).

2.° *Bajo los nombres de seno y coseno de* φ *comprendemos ahora las longitudes de las coordenadas* x *e* y *del extremo* P *del sector* $\frac{\varphi}{2}$:

$$x=\cos\varphi, \quad y=\operatorname{sen}\varphi.$$

El origen de esta denominación no parece, a la verdad, muy claro; en realidad, no se conoce bien; probablemente se ha formado la palabra «seno» por una falsa traducción de una palabra árabe al latín.

Puesto que nosotros no partimos de la medida del arco, no podemos designar las funciones inversas, es decir, el doble del sector, como función de las coordenadas, por la palabra *arco*, como se acostumbra; pero, análogamente a esto, podríamos llamar a $\frac{\varphi}{2}$ el «área» correspondiente al seno o al coseno, y, en consecuencia escribir:

$$\varphi = 2 \text{ área sen } y = \text{arc sen } y, \quad \varphi = 2 \text{ área cos } x = \text{arc cos } x.$$

También puede usarse la notación, igualmente correcta, muy corriente en Inglaterra:

$$\varphi = \cos^{-1} x, \quad \varphi = \text{sen}^{-1} y.$$

3.° *Las otras funciones goniométricas*

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi}, \quad \cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi},$$

que como la sec y la cosec, consideradas en las Trigonometrías antiguas, vienen definidas por funciones racionales sencillas de las dos fundamentales sen y cos. Su introducción se justifica sólo por la brevedad que resulta para el cálculo práctico de las fórmulas empleadas; por lo demás, no tienen importancia teórica para nosotros.

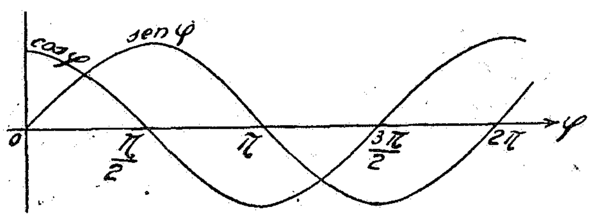

Figura 60

4) Estudiando la variación de las coordenadas del punto P, al crecer el arco φ, *podremos representar inmediatamente en coordenadas rectangulres las curvas correspondientes al seno y al coseno* (fig. 60). Se obtienen así las conocidas líneas *sinusoidales* que tienen un *período de* 2π, *estando el número* π *definido como área de todo el círculo unidad* (no, como ordinariamente, por la longitud de la semicircunferencia).

Con estas definiciones vamos ya a *comparar nuestra introducción del logaritmo y de la función exponencial.* Para ello tomamos como base:

1) *Una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas como ejes coordenados*:

$$\xi \cdot \eta = 1\ ;$$

el semieje de esta hipérbola es $OA = \sqrt{2}$ (fig. 61); mientras que

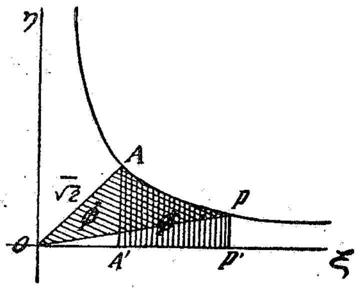

Figura 61

el círculo antes considerado es de radio unidad. *Consideremos, ahora, el área del trapecio* AA'P'P *formado por el arco* AP *la ordenada fija* AA' *correspondiente a* $\xi = 1$, *la varible* PP' *y el segmento que ambas determinan sobre el eje* ξ; *designándola por* Φ se tiene $\Phi = \log \xi$, y las coordenadas del punto P serán:

$$\xi = e^{\Phi}, \qquad \eta = e^{-\Phi}.$$

Como se ve, *hay una cierta analogía con lo anterior,* que por ahora no es completa, por una *doble diferencia;* de una parte, Φ *no es un sector* como antes, pero, en cambio, las dos coordenadas se expresan ahora por una función e^{Φ}, en tanto que en el círculo era preciso introducir *dos* funciones, *sen* y *cos.* En seguida veremos que estas diferencias pueden borrarse fácilmente.

2) Observamos ante todo que el triángulo $OP'P$ tiene un área, $\frac{1}{2} OP' \cdot P'P = \frac{1}{2} \xi \cdot \eta = \frac{1}{2}$ independiente de la posición especial del punto P; igual, como se ve, al área del triángulo $OA'A$. Por consiguiente, agregando Φ a este triángulo y restan-

do su equivalente $OP'P$ resulta que Φ *es el área del sector hiperbólico* OAP, *formado por los radios vectores que van al vértice* A *y al punto variable* P, exactamente como antes, en el círculo. La diferencia que todavía subsiste respecto del signo (visto desde O, el arco AP está recorrido de derecha a izquierda, en tanto que ahora es de izquierda a derecha) se elude fácilmente observando que la hipérbola es simétrica de sí misma respecto del eje OA, es decir, que su ecuación queda invariable al permutar entre sí ξ y η, obteniéndose entonces, como coordenadas del punto P:

$$\xi = e^{-\Phi}, \qquad \eta = e^{\Phi}$$

3) Por último, *en lugar de las asíntotas tomamos como coordenados los ejes de la hipérbola,* lo que equivale a hacer girar

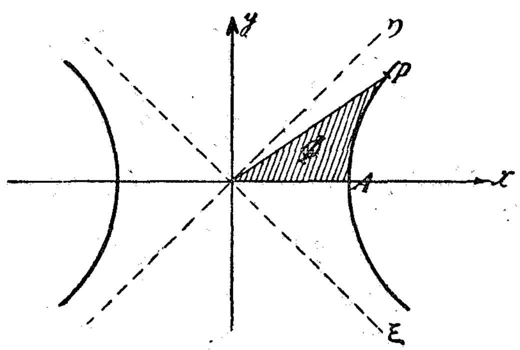

Figura 62

la figura 45° alrededor del origen (fig. 62). Designando las nuevas coordenadas por (X, Y), las ecuaciones que expresan esta transformación son:

$$X = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}},$$

con lo cual la ecuación de la hipérbola se transforma en esta otra:

$$X^2 - Y^2 = 2$$

y el sector Φ tiene exactamente la misma posición que su análogo $\frac{\varphi}{2}$ en el círculo. Las nuevas coordenadas de P son las siguientes funciones de Φ:

$$X = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}, \qquad Y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4) Basta, ahora, reducir toda la figura en la razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$, con lo cual el *semieje trasverso será igual a* 1, en lugar de ser $\sqrt{2}$, para hacer mayor la analogía con el círculo. Entonces, *hay una completa coincidencia con lo anterior al considerar el sector* $\frac{1}{2}\Phi$, *y si designamos simplemente por* x, y *las nuevas coordenadas, serán iguales a las siguientes funciones de* Φ:

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \qquad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$

que satisfacen a la relación (ecuación de la hipérbola):

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Estas funciones se llaman *coseno y seno hiperbólicos*, respectivamente, y se denotan así:

$$x = Ch\,\Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \qquad y = Sh\,\Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Se obtiene, por lo tanto, este resultado: *el círculo y la hipérbola equilátera de semieje* 1 *se corresponden entre sí de tal modo que todo lo que se diga de las funciones goniométricas ordinarias en el primero, puede aplicarse literalmente a las funciones hiperbólicas en la segunda.*

Es bien conocido al lector que de estas funciones *Ch* y *Sh* podemos servirnos con ventaja en muchos casos; no obstante, en lo que a la hipérbola concierne, hemos *retrocedido realmente un paso;* pues *mientras al principio las coordenadas* ξ, η *podían* *ser representadas por una única función* e^{Φ}, *necesitamos ahora dos,* las cuales están enlazadas por una relación algebraica (la ecuación de la hipérbola). Parece, por tanto, que debería intentarse ver si se pueden tratar las funciones goniométricas de un modo análogo a lo que hacíamos al comenzar con la hipérbola; y, en efecto, no hay dificultad ninguna siempre que se recurra al campo complejo; lo cual conduce a *establecer una función única por cuyo medio se pueden expresar racionalmente sen* φ *y cos* φ *de la misma manera que Ch* Φ *y Sh* Φ *por medio de* e^{Φ}, *desempeñando, por tanto, esta función en la teoría de las funciones goniométricas el papel central.*

1) Comenzamos, para ello, por introducir *en la ecuación del círculo* $x^2+y^2=1$ (donde $x=\cos\varphi$, $y=\operatorname{sen}\varphi$) *las nuevas coordenadas* $\xi=x+iy$, $\eta=x-iy$; con lo cual se convierte en la:

$$\xi \cdot \eta = 1.$$

2) *La función central buscada, es ahora,* exactamente como antes (2) en la hipérbola, *la segunda coordenada,* η; designándola por $f(\varphi)$, se tiene, en virtud de las fórmulas de transformación de coordenadas:

$$\eta = f(\varphi) = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi, \qquad \xi = \frac{1}{f(\varphi)} = \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi.$$

3) De estas últimas ecuaciones se deduce inmediatamente:

$$\cos\varphi = \frac{\eta+\xi}{2} = \frac{f(\varphi)+[f(\varphi)]^{-1}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\eta-\xi}{2i} = \frac{f(\varphi)-[f(\varphi)]^{-1}}{2i},$$

con lo cual hemos logrado *una analogía completa con las relaciones anteriores entre Ch* Φ, *Sh*Φ *y* e^{Φ}. Cuando se conocen con anterioridad estas analogías entre las funciones circulares e hiperbólicas, el gran descubrimiento de Euler, la igualdad $f(\varphi)=e^{i\varphi}$, pierde lo que de otro modo tiene de verdaderamente sorprendente.

Surge en seguida esta otra cuestión: *¿Será posible una reducción análoga de* sen φ *y* cos φ *a una función fundamental, sin salirse del campo real?* A ello se llega, en efecto, cuando se consideran nuestras figuras desde los puntos de vista de la *Geometría proyectiva*. Basta definir la coordenada η, que en el caso de la hipérbola nos da la función fundamental, como *parámetro en un haz* de paralelas $\eta=$const., el cual considerado desde el punto de vista proyectivo en su relación con hipérbola no es más que un *haz de rectas con el vértice en un punto de la curva* (en este caso particular, uno de los puntos del infinito); entonces, *tomando el parámetro de uno cualquiera de tales haces, en el círculo o en la hipérbola, como función del área se llega a otra función fundamental,* y ahora función real.

Consideremos, pues, en el *círculo* (fig. 63), el haz cuyo vértice es $S(-1, 0)$: $y=\lambda(x+1)$, siendo λ el parámetro; en otra

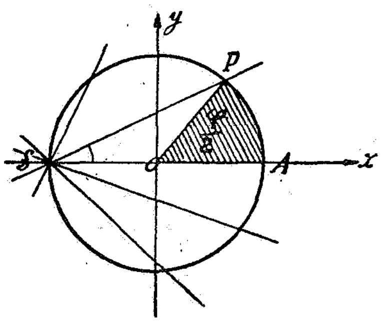

Figura 63

ocasión (pág. 65) encontramos para valores de las coordenadas del punto de intersección, P, del círculo, con el rayo correspondiente a λ:

$$x = \cos\varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \qquad y = \operatorname{sen}\varphi = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda};$$

por consiguiente:

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

es realmente una función fundamental apropiada. Puesto que además $PSA = \frac{1}{2} POA$ y $POA=\varphi$, síguese fácilmente que

$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; *esta representación uniforme de* cos φ y sen φ *en función de* tg $\frac{\varphi}{2}$ *es usada con frecuencia en el cálculo trigonométrico.*

La relación de λ con la función fundamental anterior $f(\varphi)$ se deduce en seguida de las últimas fórmulas; será:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{1}{i}\,\frac{f - f^{-1}}{f + f^{-1} + 2} = \frac{1}{i}\,\frac{f^2 - 1}{f^2 + 1 + 2f} = \frac{1}{i}\,\frac{f(\varphi) - 1}{f(\varphi) + 1}$$

o, recíprocamente,

$$f(\varphi) = x + iy = \frac{1 - \lambda^2 + 2i\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{1 + i\lambda}{1 - i\lambda}.$$

La introducción de λ viene, pues, a reducirse sencillamente a la determinación de una función lineal fraccionaria de f (φ), *real a lo largo de la circunferencia del círculo;* con ello las fórmulas son reales, pero algo más complicadas que utilizando directamente $f(\varphi)$.

Queda por saber si la ventaja de lo real compensa este inconveniente; pero eso depende del uso que quiera hacer cada cual de las magnitudes complejas. Yo me limito a hacer observar, a este respecto, que los físicos utilizan desde hace ya tiempo las magnitudes complejas, p. ej., en la Optica y siempre que tienen que manejar las ecuaciones del movimiento vibratorio; otro tanto acontece a los técnicos, sobre todo los electrotécnicos con sus diagramas vectoriales: todos ellos se sirven ya con ventaja de las magnitudes complejas. Se puede, pues, afirmar, por lo tanto, que el empleo de estas magnitudes empieza a generalizarse en círculos cada vez más amplios, aun cuando, a decir verdad, haya todavía una gran masa que se mantiene en el campo real.

Dicho esto, si queremos echar una rápida ojeada a *la teoría de las funciones goniométricas,* debemos comenzar citando:

1.° *El teorema de adición*

$$\operatorname{sen}(\varphi + \psi) = \operatorname{sen}\varphi \cos\psi + \cos\varphi \operatorname{sen}\psi$$

y la fórmula análoga para cos ($\varphi + \psi$). La razón de que estas fórmulas aparezcan relativamente más complicadas que en el caso de la función exponencial, es que no empleamos la verdadera función elemental; con ésta, $f(\varphi)=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$, resulta la siguiente fórmula, tan sencilla como la de e^{φ}:

$$f(\varphi+\psi)=f(\varphi)f(\psi)$$

2.º Partiendo de aquí, se llega a las expresiones de las *funciones de los múltiplos y divisores de un ángulo*, de las cuales únicamente nos fijamos en las dos fórmulas:

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}, \qquad \cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},$$

que fueron de gran utilidad en el cálculo de las primeras tablas trigonométricas. La síntesis más elegente de las relaciones expuestas está dada por la *fórmula de Moivre*:

$$f(n\,.\,\varphi)=[f(\varphi)]^n, \quad \text{donde} \quad f(\varphi)=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi.$$

Moivre fué un matemático francés que vivió en Londres en contacto con Newton y publicó esta fórmula en 1730 en su libro *Miscellanea analytica*.

3.º De nuestra primitiva definición de $y=\operatorname{sen}\varphi$ se puede deducir fácilmente una *representación integral de la función inversa* $\varphi=\operatorname{sen}^{-1}y$. El sector $\frac{\varphi}{2}$ (AOP) del círculo unidad junto con el triángulo $OP'P$, rayado horizontalmente (fig. 64), forma una figura que está limitada por el eje de abscisas, la paralela a la distancia y y la curva $x=\sqrt{1-y^2}$, y tiene, por consiguiente, el área $\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy$; y puesto que aquel triángulo tiene por área $\frac{1}{2}OP'\,.\,P'P=\frac{1}{2}\,y\sqrt{1-y^2}$, se tiene:

$$\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\,y\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\varphi,$$

de donde se deduce, por una transformación sencilla:

$$\varphi=\operatorname{sen}^{-1}y=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Si ahora, como en el caso del logaritmo, se desarrolla el integrando según la fórmula del binomio de Newton, y después, siguiendo el procedimiento de Mercator, se integra término a término la serie resultante, se obtiene el *desarrollo en serie de potencias de* $\operatorname{sen}^{-1} y$, y por *inversión de esta serie* se llega a la serie del seno.

Como ya dijimos (pág. 118), éste es también el procedimiento seguido por el mismo *Newton*.

4.° Vamos a exponer aquí el camino más corto para llegar al establecimiento de las funciones $\operatorname{sen} \varphi$ y $\cos \varphi$; camino abier-

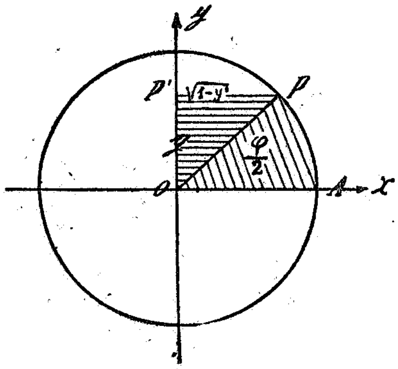

Figura 64

to por el gran descubrimiento de Taylor. De la llamada fórmula integral se deduce para derivada del seno:

$$\frac{d \operatorname{sen} \varphi}{d \varphi} = \frac{dy}{d \varphi} = \sqrt{1 - y^2} = \cos \varphi ,$$

y análogamente:

$$\frac{d \cos \varphi}{d \varphi} = - \operatorname{sen} \varphi ,$$

y en seguida aplicando la *serie de Taylor*:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \ldots$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \ldots$$

Se ve fácilmente que *estas series son convergentes para cualquier valor, real o complejo, de* φ *y, por consiguiente, definen* sen x *y* cos x *en todo el plano complejo como funciones transcendentes enteras y uniformes.*

5.° Comparando estas series con la exponencial, se deduce inmediatamente que la función fundamental de las funciones goniométricas es

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{\varphi i}$$

conclusión solo posible indudablemente por el reconocimiento de que cos φ, sen φ y e^{φ} son funciones uniformes y enteras de φ.

6.° Tenemos, todavía, que examinar la *naturaleza de las funciones complejas* sen w y cos w. Para ello observemos primeramente que *las funciones inversas* $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ *y* $w = \cos^{-1} z$ *dan cada una una superficie de Riemann de infinitas hojas con los puntos de ramificación* -1, $+1$, ∞; y, en efecto, en $z = \pm 1$ hay *infinitos* puntos de ramificación de *primer orden*, y en $z = \infty$ *dos puntos de ramificación de orden superior*. Para mejor seguir el curso de las diferentes hojas, nuevamente *consideraremos el plano* w *dividido en regiones correspondientes al semiplano* z *superior (rayado) y al inferior (sin rayar)*. Para $z = \cos w$, esta división se obtiene por medio del eje real y las paralelas al eje imaginario trazadas por los puntos $w = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... (fig. 65), resultando campos triangulares con un vértice común en el infinito, que deben aparecer alternativamente rayados y sin rayar. En los puntos $w = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, ... (corrspondintes al valor $y = +1$), y en los $w = \pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, ... (correspondientes a $y = -1$) concurren siempre cuatro triángulos correspondientes a las cuatro semihojas de la superficie de Riemann que se unen en el punto de ramificación homólogo, situado en uno de los $z = \pm 1$. Alejándose infinitamente, hacia arriba o hacia abajo, dentro de uno de dichos triángulos, cos w tiende arbitrariamente al valor $z = \infty$; el hecho de que dos sistemas separados, cada uno de infinitos triángulos, se reúnen en el infinito, corresponde, pues, a la circunstancia de que en la superficie de Riemann vienen a juntarse en $z = \infty$ dos sistemas separados de infinitas hojas.

Para $z = \operatorname{sen} w$ se obtienen resultados completamente análogos ; basta imaginar en la figura que el plano w se ha trasladado $\frac{\varphi}{2}$ hacia la derecha.

Las figuras permiten comprobar también nuestras observaciones anteriores acerca de la naturaleza del punto singular esen-

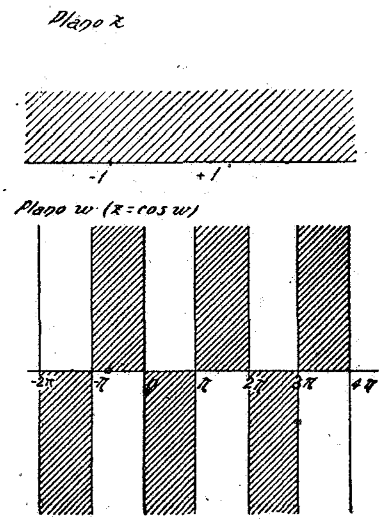

Figura 65

cial $w=\infty$, como incidentalmente indicamos al hablar del teorema de Picard (pág. 238).

2. Tablas trigonométricas

Terminada ya la rápida ojeada que nos proponíamos dirigir sobre la teoría de las funciones goniométricas, vamos a ocuparnos ahora de lo que para la *práctica* es lo más importante, a saber, las *tablas trigonométricas*, y hablaremos al mismo tiempo de las *tablas logarítmicas*, cuya consideración hemos dejado de propósito para este lugar, ya que la tabulación de los logaritmos, desde el principio hasta hoy, se ha hecho simultánea con la de los números trigonométricos.

Una cuestión muy interesante y de extraordinaria importancia para el profesor de matemáticas, es ver cómo han llegado las tablas logarítmicas a su forma presente. Naturalmente, no podemos detenernos en la exposición, que sería muy pesada, de toda la evolución que han experimentado las tablas; nos concretamos a señalar algunos hechos de los de mayor relieve, y eso será suficiente para formar una idea aproximada de la cuestión.

Aquel a quien interese y quiera informarse mejor, puede consultar la obra de historia de Tropfke, y en lo que hace a las tablas de logaritmos, ver la parte de la Enciclopedia dedicada al *cálculo numérico,* redactada por *d'Ocagne* (1).

En primer lugar debemos tratar del grupo de

A. Tablas trigonométricas naturales

tal como se construyeron *antes del descubrimiento de los logaritmos.* En la antigüedad, había ya tales tablas: la primera de que tenemos noticia es:

1.° *La tabla de cuerdas construída por Ptolomeo* para fines astronómicos, por *el año 150* de nuestra era. La tabla forma parte de su obra *Megale syntaxis,* en la cual también expone el sistema del mundo que lleva su nombre; una nueva edición de esta obra ha sido publicada por *Heiberg* (Leipzig, 1898-1903). A nosotros llegó la obra a través de los árabes y bajo el título muy usado *Almagest,* que parece derivar del título griego precedido del artículo árabe «al». La tabla, en la que figuran los ángulos *de 30 en 30 minutos, no da directamente el seno del ángulo* x, *sino la cuerda de su arco correspondiente,* o sea $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$. Los valores de las cuerdas vienen expresados en *fracciones sexagesimales de tres cifras,* o sea en la forma: $\frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \frac{c}{216000}$, donde *a, b* y *c* son números enteros comprendidos entre 0 y 59, ambos inclusive. Para nosotros, la mayor dificultad es que estos números *a, b* y *c* están escritos según la *numeración griega,* en la que los números se expresan por conjuntos de letras griegas. Además de las cuerdas, figuran en la tabla los *valores de las diferencias,* los cuales *permiten efectuar una interpolación para los*

(1) Encyclopédie des Sciences mathématiques, I, 23.

minutos. Tropfke en el tomo II, pág. 296 de su Historia (1) ha reproducido, junto con su traducción escrita según el uso actual, un trozo de la tabla, que permite formarse clara idea de ella. En lo que concierne al cálculo de esta tabla. Ptolomeo ha utilizado preferentemente el teorema que lleva su nombre, relativo al cuadrilátero inscrito, que es, en otra forma, el *teorema de adición* de las funciones trigonométricas, y la fórmula antes escrita que da el valor de sen $\frac{x}{2}$; por consiguiente, no sólo hizo uso de las operaciones racionales, sino también de la *extracción de la raíz cuadrada*, y además tuvo que aplicar un *método de interpolación*.

2.º Tienen que transcurrir más de 1000 años para que en los países occidentales sean calculadas por primera vez tablas trigonométricas. Es de citar ante todo a *Regiomontanus* (1436-1476) cuyo verdadero nombre era *Johannes Müller*, que adoptó aquel nombre latinizando el de la ciudad de su nacimiento, Königsberg, y calculó diferentes tablas trigonométricas, en las que se advierte el *paso de los restos del sistema sexagesimal al sistema decimal*. No se expresaban entonces, como hoy, las líneas trigonométricas como quebrados para el radio 1, sino que se calculaban para círculos de radio muy grande, con lo cual, conservando la misma exactitud, aparecían con *números enteros*. Estos grandes números se escribían ya entonces en el sistema decimal; pero en la elección del radio se advertía la influencia del sistema sexagesimal. Así, en la primera tabla de Regiomontano aparece el radio igual a 6.000.000; en la segunda tabla figura ya, por primera vez, una *unidad decimal exacta* 10.000.000; con lo cual se logra la completa inclusión en el sistema decimal; por sencilla agregación de una coma aparecen los números de esta tabla como fracciones decimales, como hoy se acostumbra. Estas tablas de Regiomontano fueron impresas, bastante tiempo después de su muerte, en la obra de su maestro *G. Peurbach: Tractatus super propositiones Ptolomaei de sinubus et chordis* (2). Observemos de paso que tanto esta obra como muchas otras fundamentales de matemáticas, así las de Cardano y Stifel, como ya hemos di-

(1) TROPFKE, *Gescrichte der Elementar-Mathematik*, Leipzig, 1903.
(2) Norimbergae, 1541.

cho, y lo mismo otras, fueron impresas alrededor del año 40 del siglo XVI en Nuremberg, donde por otra parte vivió Regiomontano la mayor parte de su vida.

3.° Otra obra de la mayor importancia, es la de *Nic. Koppernikus: De revolutionibus orbium celestium* (1), en la que se expone el «sistema de Copérnico». Copérnico vivió en Thorn en los años 1473-1543; ésta, su obra principal, apareció también en Nuremberg, sólo dos años después que las tablas de Regiomontano, de las que no pudo disponer todavía; por consiguiente, hubo de calcular por sí mismo la pequeña tabla de senos necesaria para su teoría, que figura en su obra.

4.° Sin embargo, estas tablas estaban aún muy lejos de satisfacer las necesidades de los astrónomos, y así vemos a un discípulo y amigo de Copérnico pretenderlo pronto con una obra mucho más interesante. Su autor es *Rhäticus,* cuyo nombre es también una latinización del de su país (Vorarlberg), y que vivió por los años 1514-1596 y fué profesor en Wittenberg. Estos hechos deben relacionarse con la época histórica a que se refieren, de la Reforma, y sabido es que entonces Wittenberg y también la ciudad libre de Nuremberg habían llegado a ser los centros principales de la vida intelectual. Sin embargo, poco a poco, durante las luchas de la Reforma, se traslada el centro de gravedad de la vida intelectual y política de las ciudades a las cortes de los príncipes; y mientras hasta entonces todo aparecía impreso en Nuremberg, aparecen publicadas las notables tablas de Rhäticus, poco después de su muerte, bajo los auspicios y a expensas del Elector de Pfalz, llevando, por ello, su nombre *Opus palatinum* (2). Estas tablas son mucho más completas que las anteriores y contienen los valores de las líneas trigonométricas de 10″ en 10″ con *diez cifras,* si bien tienen todavía muchos errores.

5.° Una nueva edición de estas tablas, muy mejorada, nos ofrece *Pitiscus* de Grünberg en Silesia (1561-1615), capellán del Elector de Pfalz. Dicha obra, titulada «*Thesaurus mathematicus*» está impresa también a expensas del príncipe y contiene las líneas trigonométricas *en intervlos de 10 minutos y con 15*

(1) Norimbegae, cap. Z. Petreium, 1543.
(2) Heidelbergae, 1596.

cifras; figuran en ella muchos menos errores que en la de Rhäticus, y su impresión es también más reducida.

Debemos tener presente que todas estas tablas se calcularon principalmente utilizando sólo las fórmulas que dan las líneas de la mitad de un arco y la interpolación, puesto que entonces no se conocían las series del seno y del coseno; por esta razón se hacen acreedores estos matemáticos a nuestro reconocimiento por la enorme actividad y trabajo que hubieron de emplear en la construcción de tales tablas.

Aquí termina la etapa precursora de las tablas del segundo grupo, el de las

B. Tablas logarítmico-trigonométricas

y es una singular coincidencia, en cierto modo una ironía de la historia: *un año después de haber logrado Pitiscus un cierto grado de perfección en las tablas de líneas trigonométricas, aparecen las primeras tablas logarítmicas, que hacen superfluas aquéllas,* ya que a partir de este momento todos utilizan en lugar del seno y del coseno sus logaritmos. Ya antes hemos citado las primeras tablas de logaritmos:

1.° «*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*» de Neper, publicada en 1614. Neper se proponía con ellas, ante todo, *facilitar el cálculo trigonométrico;* de tal suerte, que no sólo dió los logaritmos de los números naturales, sino que calculó también *los logaritmos de las líneas trigonométricas, de minuto en minuto, con siete cifras.*

2.° La disposición de las tablas de logritmos en la forma hoy corriente se debe al inglés *Henry Briggs* (1556-1630), que estaba en correspondencia con Neper, y advirtiendo *las grandes ventajas que ofrecen para el cálculo práctico los logaritmos de base 10,* por acomodarse mejor a nuestra numeración decimal, introdujo ya en 1617 la base 10 en lugar de la de Neper, en su «Logarithmorum chilias prima», obteniendo así los «*logaritmos artificiales*», que suelen llamarse *vulgares* o de Briggs. Para calcularlos, dió Briggs una serie de interesantes métodos, que permiten encontrar el valor de cada logaritmo con una aproximación dada. La segunda obra de Briggs, mayor que la primera, lleva el título: «*Arithmetica logarithmica*» (1); y en ella no figuran, como en la de Neper, las funciones goniométricas, sino solamente los *logaritmos de los números naturales,* limitándose a dar los *logaritmos de los números enteros de 1 hasta 20 000 y desde 50 000 a 100 000,* pero éstos con 14 cifras. Cosa singular: precisamente las tablas más antiguas son las que contienen los logaritmos con mayor número de cifras; en tanto que modernamente para la mayoría de los casos *basta calcularlos con muy pocas cifras;* luego volveremos sobre este punto. Briggs calculó también los *logaritmos naturales de las líneas trigonométricas con 10 cifras e intervalos de 10 minutos,* como aparecen en su *Trigonometría britannica* (2).

3.° Las deficiencias de las tablas de Briggs fueron primeramente corregidas por el holandés *Adrián Vlacq* que vivió en *Gouda,* cerca de *Leyden* y fué matemático, impresor y librero. *Vlacq* hizo una *segunda edición de la obra de Briggs* (3), la cual contiene *los logaritmos de todos los números enteros desde 1 hasta 100 000, calculados con 10 cifras.* Esta obra debe considerarse como la madre de todas nuestras actuales tablas de logaritmos de los números enteros.

En lo que concierne al desarrollo ulterior de las tablas, indicaremos aquí solamente los puntos en que estriba el progreso de las mismas en el transcurso del tiempo.

a) Aparece, en primer lugar, un *progreso esencial en la teoría,* cuando se obtiene con *la serie logarítmica un nuevo recurso útil en extremo para el cálculo de los logaritmos,* del cual estaban ignorantes por completo los calculadores de las primeras tablas. Neper calculó sus logaritmos, como antes vimos, empleando *la ecuación de diferencias,* por consiguiente, mediante *sucesivas adiciones de* $\frac{\Delta x}{x}$ y sirviéndose al mismo tiempo de la *interpolación.* En Briggs aparece como su más potente recurso la *extracción de raíces cuadradas;* vió que calculados los logaritmos de a y b conocía también el $\log\sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$; este mismo método fué seguido por Vlacq.

(1) Londini, 1624.
(2) Goudae, 1633.
(3) Briggs H., Arithmetica logarithmica. Editio secunda aucta por Adr. Vlacq. Goudae, 1628.

b) Otros progresos importantes fueron también los logrados con una *impresión y ordenación más apropiada de las tablas,* que hizo posible *encerrar mayor material y mejor dispuesto en espacio más reducido.*

c) Ante todo aumenta considerablemente la *exactitud de las tablas* al hacer desaparecer por cuidadosas rectificaciones los múltiples errores que contenían las antiguas tablas, especialmente en sus últimas cifras.

Del gran número de tablas que así se han formado, no necesitamos citar más que las más afamadas.

4.° El «*Thesausur logarithmorum completus*» (*Colección completa de las mayores tablas logarítmico-trigonométricas*), que fué publicado por el oficial de artillería austriaco *Vega* en Leipzig el año 1794. El original ha llegado a ser raro; apareció, sin embargo, en 1896, en *Florencia,* una reproducción en fototipia. El *Thesaurus* contiene *los logaritmos de los números naturales y de las líneas trigonométricas con 10 cifras* en una disposición que desde entonces se ha conservado en todas las tablas; así, por ejemplo, se ven en esta obra las tablitas de diferencias que facilitan la interpolación.

Fijándonos ya en el *siglo* XIX, se advierte una rápida generalización en el uso de los logaritmos, debida por una parte a *la introducción por el año 20 en la enseñanza secundaria,* y por otro lado a su *aplicación* cada vez mayor *a las cuestiones físicas y técnicas.* Para esto convenía una *abreviación considerable en el número de sus cifras,* pues tanto las necesidades de la enseñanza como las de la práctica no requieren tablas tan voluminosas; tres o cuatro cifras bastan perfectamente para la exactitud necesaria en la mayoría de los casos prácticos. Claro que yo recuerdo que en mis tiempos de estudiante teníamos todavía tablas de logaritmos de siete cifras y se defendía este número alegando que los discípulos debían recibir la impresión de la «Majestad de los números». Hoy se piensa, en general, más utilitariamente y *se emplean casi en todas partes con tres, cuatro, a lo sumo cinco cifras.*

Tres *tablas modernas* tomadas al azar vamos a citar ligeramente: Una de ellas es una tabla pequeña y muy manual de

Schubert (1) que contiene los logaritmos con 4 cifras; en ésta se encuentran toda clase de recursos auxiliares como impresión a dos tintas, repetición de las inscripciones arriba y abajo en cada página, etc., para evitar lo más posible cualquier error. Todavía mucho más refinadamente están presentadas unas tablas modernas americanas de Huntington (2) donde, por ejemplo, las hojas están provistas de diferentes salientes y secciones que permiten abrir el libro por la página deseada inmediatamente; citemos por último la *regla del cálculo* que, como es sabido, no es otra cosa que una *tabla de logaritmos con tres cifras,* presentada bajo la forma muy cómoda de un instrumento de cálculo.

No hemos llegado con esto todavía al término de la evolución que vamos considerando, pero podemos imaginar con bastante claridad cómo se ha continuado. Ultimamente se ha extendido el uso de las *máquinas de calcular,* de las cuales hemos tratado ya (pág. 23 y sig.), que permiten prescindir de las tablas de logaritmos, ya que, con ellas, se realiza mucho más rápidamente y con completa seguridad la multiplicación directamente. Cierto que tales máquinas están todavía lo bastante caras para que solamente puedan tenerlas en los grandes despachos y oficinas, pero cuando se abaraten empezará una *nueva fase en el cálculo numérico.* En lo que concierne a la Goniometría las *antiguas tablas de Pisticus,* anticuadas ya al nacer, *recuperan el puesto de honor,* puesto que dan directamente valores trigonométricos, con los que las máquinas de calcular, evitando el rodeo de los logaritmos, permitirán efectuar todos los cálculos mucho más cómodamente.

3. Aplicaciones de las funciones goniométricas

Nos queda ahora por examinar lo que se refiere a la aplicación de las funciones goniométricas; consideraremos para ello tres campos diferentes:

A) *La Trigonometría,* que dió el principal impulso al descubrimiento de las funciones goniométricas.

B) La *Mecánica,* en la que señaladamente la *teoría de las*

(1) Vierstellige Tafeln und Gegentafeln. (Samml. Göschen Leipzig, 1917.)
(2) C. V. Huntington: Four place tables Abrigded edition, Cambridge, Mass., 1907.

pequeñas oscilaciones ofrece un amplio campo de aplicación de estas funciones.

C) La *representación de las funciones periódicas por series trigonométricas,* que, como se sabe, desempeñan un papel importantísimo en las cuestiones más diversas.

A. Trigonometría; en particular, Trigonometría esférica

Consideremos ahora una *ciencia antiquísima,* que ya en Egipto se hallaba en estado floreciente, estimulada por las exigencias de dos ciencias muy importantes: la *Geodesia,* que necesita de la teoría de los triángulos planos, y la *Astronomía,* que emplea los esféricos. Para la *Historia de la Trigonometría* tenemos una espléndida monografía en la obra de *A. v. Braunmühls* «*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*» (1). Acerca de la parte práctica de la Trigonometría se halla excelente información en el libro de *E. Hammers* «*Lehrbuch der ebenen und sphärischer Trigonometrie* (2), y en lo que se refiere a la teoría en el segundo tomo de la ya citada «*Encyklopaedie der Elementarmathematik*» de *Weber-Wellstein.*

En el estrecho marco de estas lecciones no cabe una *exposición sistemática de toda la Trigonometría,* por lo cual voy a limitarme a hablar sólo de *un capítulo muy interesante de la Trigonometría teórica, que, a pesar de ser muy antiguo, aún no puede considerarse como terminado, sino que encierra todavía hoy cuestiones y problemas no acabados y de carácter relativamente elemental,* cuya investigación me parece de interés: me refiero a la *Trigonometría esférica.* El lector puede hallar este asunto muy prolijamente tratado en *Weber-Wellstein,* en cuya obra están ya contenidas las ideas desarrolladas por Study en su memoria fundamental «*Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen* (3).

Vamos a intentar en lo que sigue una ojeada a las teorías que integran esta rama de las ciencias y, en particular, indicar algo sobre las cuestiones todavía no acabadas.

(1) Dos tomos, Leipzig, 1900 y 1903.
(2) Stuttgart, 19 6; 5.ª ed., 1923.
(3) Abhandl. der Math. phys. Klasse der K. Sachsischen Gesells. der Wissenschaften Bd. XX N.° II (Leipzig, 1893).

El concepto elemental de un triángulo esférico apenas necesita explicación: *tres puntos de una esfera determinan* (con tal que dos de ellos no sean diametralmente opuestos) *un triángulo, en el cual cada uno de los tres ángulos y cada lado está comprendido entre* 0 *y* π (fig. 66). Sin embargo, cuando se trata de estudiar estas cuestiones más a fondo se aprecia la conveniencia de *considerar los lados y ángulos como variables que pueden tomar valores cualesquiera,* que pueden ser mayores que π, 2π ó cualquier múltiplo de éstos, teniéndose que hablar entonces de *lados que se superponen* y de *ángulos que se recubren alrededor de su vértice,* lo cual exige establecer ciertos con-

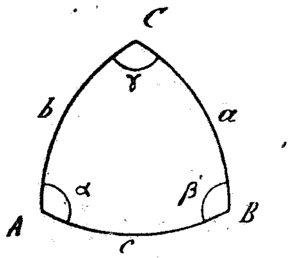

Figura 66

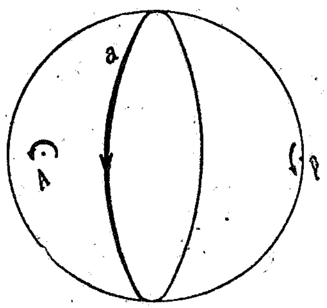

Figura 67

venios sobre el *signo* de estas magnitudes, es decir, el *sentido* en que se miden, cosa lograda por el gran geómetra de Leipzig, *Möbius,* quien, análogamente a lo que se hace en Geometría, introdujo en la Trigonometría esférica *el principio de los signos,* con lo cual abrió camino apto para su desenvolvimiento a las investigaciones generales relativas a estas magnitudes de variabilidad ilimitada (1).

Para estos convenios se parte de fijar un *determinado sentido de rotación y se consideran positivos los ángulos cuyo vértice es un punto cualquiera, A, de la esfera y están descritos en aquel sentido* (fig. 67), y una vez hecho esto para un punto de la esfera, se generaliza el convenio para cualquier otro punto de la misma, siguiendo la ley de continuidad.

(1) Véase, en particular su memoria, «*Entwicklung der Grundformeln des sphärischen Trigonometrie in grösstmögliche Allgemeinheit,* Berichte über die Verhandlungen der K. Saechs. Ges. der Wiss. Math.-phys. Klasse, 1860. Bd, 12=Ges. Werke, pág. 71 y sig. Leipzig, 1886.

En lo que sigue tomaremos como *positivo el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj:* por otra parte es preciso también asignar *un sentido de recorrido a cada círculo máximo de la esfera,* y aquí no basta ya establecer un convenio para un círculo y por una transformación continua extenderlo a todos los demás, puesto que todo círculo máximo puede llevarse a coincidir con cualquiera otro de dos modos esencialmente diferentes. Por esta razón, cada vez que hayamos de considerar un círculo deberemos fijar el sentido que le corresponde y aun en ocasiones habremos de mirar el mismo círculo como dos figuras distintas, según le atribuyamos uno u otro sentido. *Con estos convenios se puede hacer corresponder a cada círculo máximo un polo determinado, P, a saber, aquel de los dos polos definidos en Geometría elemental, desde el cual aparece recorrido en sentido positivo; y análogamente, a cada punto corresponde un «círculo polar» recorrido en un sentido determinado.* De esta manera queda fijado en Trigonometría completamente, *sin ambigüedad, el importante «proceso de la polarización».*

Sean, ahora, tres puntos A, B, C, dados sobre la esfera; para definir *sin ambigüedad* el triángulo esférico de vértices A, B y C, serán necesarios algunos datos más. En primer término debe fijarse un sentido sobre *cada uno de los tres círculos máximos* BC, CA y AB y además hay que indicar *cuántas veces han de ser recorridos en el sentido fijado* para ir de B a C, de C a A y de A a B, respectivamente. Las longitudes a, b y c así determinadas, que pueden ser magnitudes reales *cualesquiera,* se llaman *lados del triángulo esférico,* y, naturalmente, las supondremos trazadas sobre una esfera de *radio* 1. Los *ángulos* se definen entonces del modo siguiente: *α está engendrado por la rotación en sentido positivo que hace pasar del sentido positivo del lado* CA, *que termina en* A, *al sentido positivo del lado* AB *que parte de* A, pudiéndose agregar al ángulo así obtenido *un múltiplo cualquiera* de $\pm 2\pi$; y cosa análoga se dice para los otros ángulos. Consideremos un *triángulo esférico elemental* ordinario, como el de la figura 68, y fijemos los sentidos de los lados de modo que a, b, c, sean menores que π; entonces se ve que los ángulos α, β, γ, según esta nueva definición, son los *ángulos externos* del triángulo, no, como en el convenio elemental, sus *ángulos interiores.*

Es un hecho de antiguo conocido que las *fórmulas de la Trigonometría esférica* toman forma *más sencilla y simétrica* cuando se reemplazan los ángulos del triángulo, medidos como de ordinario, por sus suplementos. La verdadera razón de ello es la siguiente: El proceso de polarización antes indicado hace corresponder a cada triángulo determinado siguiendo los convenios de Möbius, otro triángulo, llamado *triángulo polar o suplementario* del primero, y se ve fácilmente que en éste, por virtud de dichos

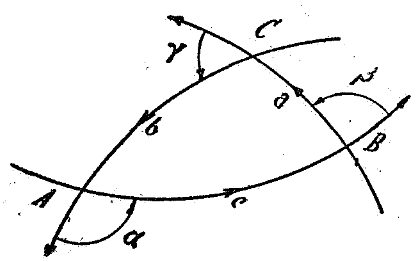

Figura 68

convenios, *los lados y los ángulos son, respectivamente, los ángulos y los lados de aquél. Según esto, toda fórmula de Trigonometría esférica escrita con arreglo a estas notaciones debe seguir siendo cierta cuando en ella se cambien* a, b *y* c *por* α, β *y* γ, *respectivamente;* por consiguiente, debe presentar una *simetría sencilla.* Por el contrario, cuando los lados y ángulos se miden en el sentido elemental, no puede subsistir la simetría, sino que la forma de la relación entre un triángulo y su suplementario depende de cómo se suponen tomados en cada caso particular los lados y ángulos, así como del criterio que decida cuál se haya de tomar entre los dos polos de un círculo dado, en el que no se ha fijado ningún sentido.

Es, ahora, claro, que *de los seis elementos del triángulo esférico así definidos solamente tres pueden variar de un modo continuo e independientes uno de otro;* p. ej., dos lados y el ángulo que forman. Las fórmulas de Trigonometría esférica establecen un cierto número de relaciones entre los elementos de un triángulo, o, dicho más exactamente, un sistema de relaciones algebraicas entre sus doce senos y cosenos, por el cual, sólo tres de estas doce magnitudes pueden variar arbitrariamente, en tanto que las otras nueve dependen algebraicamente de éstas, siendo de notar que al tomar senos y cosenos, se prescinde, naturalmente, del convenio acerca de la adición de un múltiplo cualquiera de 2π. Concebida la *Trigonometría*, en general, *como el conjunto de todas las relaciones algebraicas posibles de esta naturaleza,* podremos sintetizar su objeto, adoptando un criterio moderno, de esta manera:

Consideremos las magnitudes

$$x_1 = \cos a,\quad x_2 = \cos b,\quad x_3 = \cos c,\quad x_4 = \cos \alpha,\quad x_5 = \cos \beta,\quad x_6 = \cos \gamma$$

$$y_1 = \operatorname{sen} a,\quad y_2 = \operatorname{sen} b,\quad y_3 = \operatorname{sen} c,\quad y_4 = \operatorname{sen} \alpha,\quad y_5 = \operatorname{sen} \beta,\quad y_6 = \operatorname{sen} \gamma$$

como coordenadas de un espacio de doce dimensiones, E_{12}; *el conjunto de todos sus puntos, que realmente corresponden a un triángulo esférico posible* a, ..., γ *representa una variedad algebraica tridimensional* V_3 *de este* E_{12}, *y esta* V_3 *debe ser estudiada en* E_{12}. Con esto, *la Trigonometría esférica queda incluída dentro de la Geometría analítica general multidimensional.*

La variedad V_3' debe poseer diferentes *simetrías sencillas;* así, resultaba del proceso de polarización que la sustitución de a, b y c por α, β y γ conduce a un nuevo triángulo esférico, lo que en este nuevo modo de hablar se expresará diciendo que de cada punto de V_3 se deduce otro perteneciente a la misma variedad cuando se cambian x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 por x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6, respectivamente.

Otra simetría se deducirá de la consideración de que dado un triángulo, la descomposición del espacio en ocho octantes por los planos de los tres círculos máximos origina otros *siete triángulos adyacentes,* cuyos elementos se obtienen de los del triángulo primitivo por simples cambios de signo y adición de π; esto hace deducir de cada punto de V_3 otros siete, cuyas coordenadas resultan de cambios de signos en las x_1, ..., x_6.

El conjunto de todas estas simetrías conduce, en último término, a un cierto *grupo de permutaciones y cambios de signo de las coordenadas de* E_{12}, *que transforman* V_3 *en sí misma.*

La cuestión más importante, ahora, es *encontrar las ecuacio-*

nes algebraicas a las cuales satisfacen las coordenadas de los puntos de V_3 *y que forman el conjunto de las fórmulas de la Trigonometría esférica.* Puesto que siempre $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$, se tienen, por lo prnto, las *seis relaciones cuadráticas:*

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{1}$$

que, geométricamente hablando, representan *seis superficies cilíndricas de segundo orden* $S^{(2)}$ *que contienen la variedad* V_3.

Otras seis fórmulas nos da el *teorema del coseno,* de la *Trigonometría esférica:*

$$\cos\alpha = \cos b \cos c - \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos\alpha,$$

del cual por polarización se deduce

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\gamma \cos\alpha.$$

Estas fórmulas y las cuatro que de ellas se deducen por permutación cíclica de a, b, c y α, β, γ representan *seis superficies cúbicas* $S^{(3)}$ que pasan por V_3:

$$x_1 = x_2x_3 - y_2y_3x_4, \quad x_2 = x_3x_1 - y_3y_1x_5, \quad x_3 = x_1x_2 - y_1y_2x_6, \tag{2}$$

$$x_4 = x_5x_6 - y_5y_6x_1, \quad x_3 = x_6x_4 - y_6y_4x_2, \quad x_6 = x_4x_5 - y_4y_5x_3. \tag{3}$$

Finalmente, podemos utilizar el *teorema del seno,* que se expresa por la anulación de los menores de la siguiente matriz:

$$\left\| \begin{matrix} \text{sen}\, a, & \text{sen}\, b, & \text{sen}\, c, \\ \text{sen}\,\alpha, & \text{sen}\,\beta, & \text{sen}\,\gamma, \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{matrix} \right\|,$$

que desarrollados nos dan:

$$y_2y_6 - y_3y_5 = y_3y_4 - y_1y_6 = y_1y_5 - y_2y_4 = 0 \tag{4}$$

cuyas ecuaciones representan *tres cuádricas* $S^{(2)}$, de las cuales solamente dos son independientes. *Tenemos, pues, en total, quince ecuaciones establecidas para* V_3 *en el espacio* E_{12}.

Ahora bien, para determinar una figura tridimensional en el espacio E_{12}, no bastan en general, 12—3=9 ecuaciones; puesto que ya en la Geometría ordinaria del espacio E_3 no es preciso, como se sabe, que cada curva en el espacio sea intersección completa de dos superficies; el ejemplo más sencillo es el de las cúbicas, para cuya determinación son necesarias tres ecuaciones, por lo menos. Se ve fácilmente también en nuestro caso que las nueve ecuaciones [1] y [2] no determinan la variedad V_3; pues es sabido que *del teorema del coseno se puede deducir el del seno, salvo un signo*, que suele determinarse por consideraciones geométricas.

La cuestión sería, ahora, saber *qué ecuaciones trigonométricas y en qué número determinan completamente la variedad* V_3 *que nos ocupa.* Sobre todo, quisiera formular aquí cuatro cuestiones bien precisas, acerca de las cuales no se ha dado hasta hoy contestación adecuada; merecería, pues, la pena estudiarlas a fondo, cosa que es de suponer no fuese muy difícil para quien tenga alguna habilidad en el manejo de las fórmulas de la Trigonometría esférica. Estos problemas son:

1.° ¿Cuál es el *orden* de V_3?

2.° ¿Cuáles son las *ecuaciones más sencillas que sirven para caracterizar* V_3?

3.° ¿Cuál es el *sistema completo de ecuaciones linealmente independientes representativas de* V_3, es decir, de las ecuaciones $f_1=0$, ..., $f_n=0$, tales que por composición lineal de las mismas con factores racionales enteros m_1, ..., m_n pueda obtenerse la ecuación de cualquiera otra superficie que pase por V_3, en la forma $m_1f_1+\ldots+m_nf_n=0$? Esto puede exigir el conocimiento de más ecuaciones que las que resuelven el problema 2.°

4.° ¿Qué *identidades algebraicas (las llamadas sizigias)* existen entre estas n fórmulas f_1, ..., f_n?

Se puede encontrar orientación sobre estas materias en investigaciones realizadas exactamente en la misma dirección, aunque planteadas en forma un poco diferente que ésta, que pueden verse en la *Dissertation* de la Srta. *Chisholm* (ahora señora *Young*) en la Universidad de Gotinga (1) el año 1894, que es la primera tesis doctoral llevada a cabo por una mujer en Prusia. Entre las contribuciones de la Srta. Chisholm, merece citarse

(1) Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphaerischen Trigonometrie. Göttingen, 1895.

en primer término el emplear *como coordenadas independientes las cotangentes de las mitades de los lados y de los ángulos;* pues como $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (y también, naturalmente, $\cot\frac{\alpha}{2}$ es una función fundamental por cuyo medio se expresan uniformemente $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$, *todas las ecuaciones trigonométricas pueden expresarse como relaciones algebraicas entre* $\cot\frac{a}{2}$, ..., $\cot\frac{\gamma}{2}$ *Los triángulos esféricos forman, por consiguiente, así, una variedad algebraica tridimensional* V_3 *en el espacio de seis dimensiones* E_6, cuyos puntos tienen por coordenadas $\cot\frac{a}{2}$, ..., $\cot\frac{c}{2}$ $\cot\frac{\alpha}{2}, \ldots, \cot\frac{\gamma}{2}$. La Srta. Chisholm demuestra que esta variedad es de *orden* 8, y puede representarse *como intersección completa de tres superficies de segundo grado* (ecuaciones cuadráticas) del espacio E_6 y estudia también las otras cuestiones que hemos planteado desde nuestro punto de vista.

En mis lecciones sobre la función hipergeométrica (1), he llamado al grupo de fórmulas de Trigonometría esférica de que hemos hablado hasta aquí, y que enlazan los senos y cosenos de los lados y ángulos, *fórmulas de primera especie;* frente a ellas hay otro grupo esencialmente distinto, las *fórmulas de segunda especie,* que son las *ecuaciones algebraicas que fijan las funciones trigonométricas de los semiángulos y semilados.* Para su estudio, lo mejor es considerar las doce magnitudes

$$\cos\frac{a}{2}, \quad \operatorname{sen}\frac{a}{2}, \quad \ldots; \quad \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}, \quad \ldots$$

como coordenadas de un nuevo *espacio de doce dimensiones* E'_{12}, en el que los triángulos esféricos forman, como antes, una variedad algebraica de tres dimensiones V'_3. Entre estas fórmulas figuran en primer término las muy elegantes que a principios del siglo pasado fueron casi simultáneamente publicadas, independientemente unos de otros, por *Delambre* (1807), *Mollweide* (1808) y, por último, *Gauss* (1809) *en la Theoria motus corporum*

(1) Redactadas por E. Ritter, 1893-94. 2.ª ed. Leipzig, 1906.

coelestium. Núm. 54 (1). Son las doce que se deducen por permutación cíclica de las:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \mp \frac{\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.$$

$$\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \mp \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}$$

Lo que las diferencia esencialmente de las fórmulas de primera especie es el *doble signo* que contienen; *debiendo tomarse en todas ellas, cuando se aplican al mismo triángulo, siempre el signo superior o el inferior, habiendo triángulos tanto de la una como de la otra clase. La* V'_3 *de los triángulos esféricos en el espacio* E'_{12} *hace poco definido, satisface, pues, a dos sistemas completamente distintos de doce ecuaciones cúbicas cada una y, por consiguiente, se descompone en dos variedades algebraicas separadas*: $\overline{V}_3$ correspondiente a uno de los signos, el superior p. ej., y $\overline{V}_3$ al otro. Esta curiosa circunstancia es la que da a tales fórmulas la gran importancia que tienen en la teoría de los triángulos esféricos y hace que representen mucho más que una mera transformación de las antiguas ecuaciones, que a lo sumo sirviera para simplificar el cálculo trigonométrico. Delambre y Mollweide consideraban las fórmulas sólo desde este punto de vista práctico; *Gauss* fué el primero que advirtió la importancia señalada, pues llama la atención expresamente acerca de la posibilidad de un cambio de signo «cuando se concibe el triángulo esférico en su más amplia generalidad». Por este motivo me parece muy justo llamar a estas fórmulas, fórmulas de Gauss, aun cuando no sea suya la prioridad en la publicación.

Toda la transcendencia de este hecho no fué, sin embargo reconocida hasta Study, que la expuso en su obra ya citada (pág. 261) en 1894. Su resultado principal se puede enunciar del

(1) Abgedruckt Werke, Bd. VII, pág. 67. Leipzig, 1906.

modo más cómodo cuando se considera el espacio de seis dimensiones, E_6, que tiene por coordenadas los valores a, b, c, α, β, γ considerados como variables ilimitadas; las llamaremos *elementos transcendentes* del triángulo en contraposición a los elementos algebraicos $\cos a$, ... o $\cos\frac{a}{2}$, ...; puesto que aquellos son funciones transcendentes y éstas funciones algebraicas de las coordenadas ordinarias de los vértices del triángulo. En este espacio E_6 se designa al conjunto de todos los triángulos esféricos como la *variedad transcendente* $V_3^{(\prime)}$, cuya imagen en E'_{12} era la variedad algebraica V'_3 antes considerada; y puesto que ésta se descomponía en dos partes y las funciones representativas $\cos\frac{a}{2}$, ... son funciones uniformes y continuas de las coordenadas transcendentes, también la variedad transcendente $V_3^{(\prime)}$ debe descomponerse en dos partes separadas, por lo menos. *El teorema de Study* se enuncia entonces así: *La variedad transcendente* $V_3^{(\prime)}$ *de los valores* a, b, c, α, β, γ *relativos a un triángulo esférico de la clase más general se descompone en dos partes, separadas una de otra, correspondientes a los dos signos que aparecen en las fórmulas de Gauss, y cada una de ambas partes forma un continuo conexo.* Lo más importante de este resultado es la *exclusión de cualquiera otra descomposición;* por consiguiente, no se puede llegar por nuevos estudios sobre las fórmulas trigonométricas a divisiones análogas y tan profundas de los triángulos esféricos. Los triángulos del primer grupo, correspondiente al signo superior en las fórmulas de Gauss, reciben el nombre de *triángulos propios,* y los que pertenecen al otro grupo, el de *impropios,* con cuyas denominaciones se puede enunciar brevemente el teorema de Study diciendo que *el conjunto de todos los triángulos esféricos se descompone en un continuo de los propios y uno de los impropios.* El lector podrá hallar en la obra de Weber-Wellstein (1) más pormenores sobre este asunto y una demostración del teorema de Study; aquí nos limitamos a indicar los resultados del modo más intuitivo posible.

Agreguemos algo más sobre la *diferencia entre ambas clases de triángulos.* Supongamos dado un triángulo esférico cualquie-

(1) Tomo II, 2.ª ed., 1907, pág. 385 y sig.

ra, es decir, un «sistema de valores posibles» de a, b, c, α, β y γ cuyos senos y cosenos satisfacen a las fórmulas de primera especie, y que, por consiguiente, representan un punto de $V_3^{(\iota)}$: *¿cómo se podrá distinguir si se trata de un triángulo propio o de uno impropio?* Para verlo, comenzaremos por formar los restos positivos mínimos a_0, b_0, c_0, α_0, β_0, γ_0 de los números dados respecto al módulo 2π:

$$a_0 \equiv a \,(\mathrm{mod}\, 2\pi), \ldots, \qquad \alpha_0 \equiv \alpha \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \ldots$$
$$0 \leqslant a_0 < 2\pi \ldots, \qquad 0 \leqq \alpha_0 < 2\pi \ldots$$

Sus senos y cosenos coinciden con los de a, ..., α, ..., de modo que representan un nuevo triángulo esférico, que llamaremos *reducido* respecto del primitivo, o *triángulo de Möbius*, atendiendo a que Möbius condicionó la variabilidad de los elementos del triángulo a que no llegasen a 2π. Ahora vamos a distinguir, acudiendo a una pequeña tabla, *cuándo un triángulo de Möbius es propio o impropio*; puede verse esta tabla en una forma algo menos clara en Weber-Wellstein (pág. 252, 379, 380) que también contiene figuras (pág. 348, 349) correspondientes a los tipos de triángulos propios e impropios. Llamaremos como de costumbre ángulos *entrantes* a los comprendidos entre π y 2π, y por razón de brevedad aplicaremos la misma denominación a los lados del triángulo esférico. Tenemos, entonces, en total, cuatro casos típicos de ambas clases:

II. Triángulos de Möbius propios:

1)	0 lados entrantes	;	0 ángulos	entrantes
2)	1 » »	;	2 ángulos contiguos	»
3)	2 » »	;	1 ángulo comprendido	»
4)	3 » »	;	3 ángulos	»

II. Triángulos de Möbius impropios:

1)	0 lados entrantes	;	3 ángulos	entrantes
2)	1 » »	;	1 ángulo opuesto	»
3)	2 » »	;	2 ángulos opuestos	»
4)	3 » »	;	0 ángulos	»

No existen otros casos que los aquí enumerados, de modo que *con esta tabla se puede distinguir la naturaleza de cualquier triángulo de Möbius.*.

El paso al triángulo general a, ... α, ... desde su correspondiente triángulo de Möbius se realiza, según lo antes expuesto, mediante las fórmulas:

$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi$$

$$\alpha = \alpha_0 + \nu_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + \nu_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + \nu_3 \cdot 2\pi$$

y se verifica el teorema: *El triángulo general tiene o no el mismo carácter de ser propio o impropio que el triángulo reducido, según que la suma de los seis números enteros* $n_1 + n_2 + n_3 + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ *sea par o impar;* con lo cual queda completamente determinado el carácter de cualquier triángulo.

Vamos a terminar esta parte del curso con algunas *observaciones acerca del área del triángulo esférico,* asunto del que nada se trata en las investigaciones de Study, ni en la obra de Weber-Wellstein; aunque este concepto adquirió importancia con mis *antiguas investigaciones teórico-funcionales sobre triángulos de lados circulares.* Mientras que hasta ahora el triángulo no era más que el conjunto de tres ángulos y tres lados que satisfacen a los teoremas del seno y del coseno, trátase aquí ahora del *área limitada por estos tres lados, perfectamente determinada;* en cierto modo, como de una *membrana* tendida entre los tres lados se cortan formando ciertos ángulos.

No hay que tener ya aquí en cuenta los *ángulos exteriores* α, β, γ del triángulo, como hasta ahora hemos hecho por razones de simetría, sino que hablaremos de los *ángulos que la membrana forma en los vértices,* y que, para abreviar, llamaremos *ángulos interiores;* los designaremos por $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ (fig. 69). También pueden considerarse estos ángulos como magnitudes *variables cualesquiera que sólo pueden tomar valores positivos;* porque no queremos excluir el caso de ser los vértices de la membrana puntos de recubrimiento, es decir, en que los ángulos pueden recubrirse. Análogamente, designaremos por $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, las longitudes absolutas de los lados, que también suponemos *variables positivas ilimitadas.* Ahora, sin embargo, no podrán ya todos los lados y ángulos recubrirse un número arbitrario de veces, independientemente unos de otros; es decir, no podrán contener un múltiplo cualquiera de 2π; sino que *el hecho de que exista una sola membrana conexa, con estos lados y ángulos, se expresa por ciertas relaciones entre los números de estos recubrimientos*, que en mi trabajo: *Ueber die Nullstellen der hipergeometrischen Reihen* (1) he designado con el nombre de *relaciones complementarias de la Trigonometría esférica* y

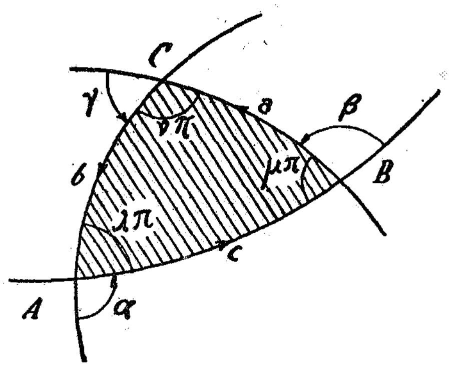

Figura 69

son las siguientes, designando por $E(x)$ el mayor número entero positivo contenido en x, $(E(x) < x)$:

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right)$$

$$E\left(\frac{m}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda + \mu - \nu + 1}{2}\right)$$

$$E\left(\frac{n}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda - \mu + \nu + 1}{2}\right).$$

y puesto que $E\left(\frac{l}{2}\right)$, por ejemplo, indica el múltiplo de 2π contenido en el lado $l\pi$, *estas relaciones determinan precisamente los números de recubrimiento de los lados $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ cuando se conocen los ángulos $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ con sus números de recubrimiento*. En particular se ve fácilmente que, siendo positivos λ,

(1) Mathematische Annalen, tomo 37, 1888; reproducido en la edición de las Obras completas de Klein, tomo II, pág. 550, 1921.

μ y ν, sólo *uno* de los tres números $\lambda-\mu-\nu$, $-\lambda+\mu-\nu$, $-\lambda-\mu+\nu$, a lo sumo, puede ser positivo; por consiguiente, tampoco puede haber más de uno de los tres argumentos de los segundos miembros mayor que 1, y puesto que $E(x)=0$ para $x<1$, sólo uno de los tres números de recubrimiento de lados puede ser diferente de cero. Podemos, pues, decir: *en una membrana triangular sólo puede recubrirse* (ser$>2\pi$) *a lo sumo un lado, el opuesto al mayor ángulo.*

En lo que respecta a la demostración de estas relaciones complementarias, remitimos al lector al curso autografiado de Klein, *Ueber die hypergeometrische Funktion,* pág. 384 y sig., donde, lo mismo que en el trabajo antes citado, inserto en *Math. Analen,* tomo 37, el estudio está hecho con una mayor generalidad, pues se consideran, además, «triángulos esféricos» limitados por círculos cualesquiera, no necesariamente máximos. Aquí nos limitaremos a sintetizar en pocas palabras el *proceso de la demostración.* Se parte de un triángulo elemental en el que se-

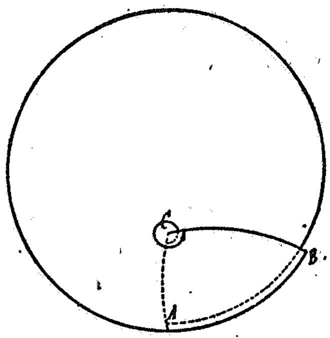

Figura 70

guramente puede colocarse tensa una membrana, y se va generalizando sucesivamente hasta llegar a las formas más generales posibles de membrana, mediante la reiteración de *agregaciones convenientes de membranas de forma circular en los lados o con puntos de ramificación en los vértices.* La figura 70 muestra como ejemplo, representado en proyección estereográfica, un triángulo ABC que se obtiene partiendo de uno elemental, por superposición de una semiesfera limitada por el círculo máximo AB, con lo cual tanto el lado AB como el ángulo en C se recubren una vez. Se ve que en este proceso, las relaciones complementarias se conservan, encontrándose finalmente que su validez subsiste para las membranas triangulares más generales a que se puede llegar con este método de construcción.

Veamos ahora *cómo se comportan estos triángulos que satisfacen a las relaciones complementarias en la teoría general antes expuesta*. Evidentemente, son *casos particulares*, puesto que en el caso general, los números de recubrimiento de lados y ángulos son completamente arbitrarios, *casos especiales caracterizados precisamente por la posibilidad de la tensión de una membrana*. Puede con esto, indudablemente, surgir una desorientación en el primer momento. Hemos visto, en efecto, que todos los triángulos propios—cuyo conjunto no necesita satisfacer a las relaciones complementarias—forman un continuo; y que, por consiguiente, cada uno de ellos se puede deducir, por ley de continuidad de un triángulo elemental; parece, pues, que la membrana tensa en este triángulo elemental no puede perderse en esta transformación continua operada en el triángulo. La solución de esta dificultad se encuentra *generalizando al área el principio de Möbius sobre la determinación del signo; entonces se considera un área positiva o negativa, según que su contorno sea recorrido en sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj) o en sentido negativo*. Si el área considerada está limitada por una curva que se corta a sí misma, deberá entrar en el cálculo *como suma algebraica de las diferentes partes de que consta, tomando cada una con el signo correspondiente al sentido en que se recorre su contorno;* p. ej., en la figura 71, deberá tomarse la diferencia de las partes que se distinguen por el distinto rayado, y en la figura 72, por el contrario, la suma. Estos convenios son, naturalmente, simple expresión geométrica del contenido de la definición analítica.

Aplicando esto, en particular, a los triángulos limitados por arcos de círculo, se ve que, en efecto, *a todo triángulo propio se le puede asignar un área sobre la esfera, y al recorrer una sola vez el contorno del triángulo, los de sus diferentes partes pueden ser recorridos unos en sentido positivo y otros en sentido negativo; debiendo, en consecuencia, tomarse estas partes en el cálculo con el signo respectivo. Los triángulos que satisfacen a* *las relaciones complementarias sólo tienen entonces la particularidad de componerse de una sola porción de membrana cuyo contorno está recorrido en sentido positivo;* esta propiedad es la

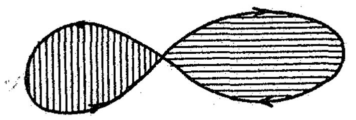

Figura 71

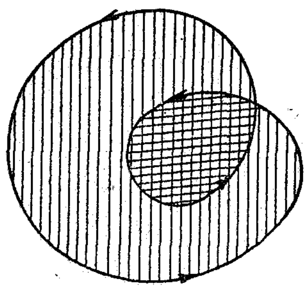

Figura 72

que les da la gran importancia que tienen en la teoría de funciones, en cuyos estudios los he utilizado.

Para aclarar más esto, recurriremos a un ejemplo. Conside-

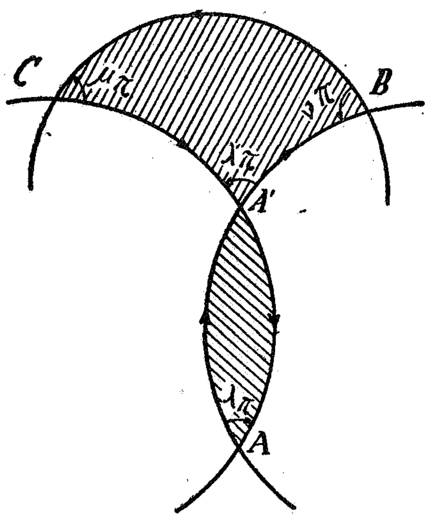

Figura 73

remos (fig. 73) el triángulo ABC representado en proyección estereográfica, en el que A es el punto de intersección de los círculos máximos BA y CA más alejado del arco BC; al segundo punto de intersección lo designamos por A'. Aplicando la definición general de los ángulos exteriores (pág. 263) a sus suplementos, los ángulos interiores, se ve que $\mu\pi$ y $\nu\pi$ miden los giros que llevan a coincidir los lados BC y CA con BA y CB, respectivamente, y, en este caso, son positivos; del mismo modo, $\lambda\pi$ mide el giro que lleva AB a AC y, por tanto, es *negativo;* para mayor claridad, pondremos $\lambda = -\lambda'$, $\lambda' > 0$.

El triángulo $A'BC$ es, entonces, evidentemente, un triángulo elemental con los ángulos $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, los tres positivos. Recorramos, ahora, el contorno del triángulo ABC en el sentido indicado; entonces será recorrido el triángulo elemental $A'BC$ en sentido positivo, pero el huso esférico AA' en sentido negativo y tendremos que calcular el área del triángulo, según los convenios de Möbius, como *diferencia entre las áreas de ambas porciones.* Esta descomposición de la membrana del triángulo en una parte positiva y en otra negativa, según el sentido en que se recorre su contorno, se puede quizá representar de un modo intuitivo imaginando que la membrana está vuelta en A', de modo que en el huso menor se ve la cara que en el cálculo debe contarse como negativa. Sería fácil, siguiendo este método, presentar ejemplos más complicados.

El mismo ejemplo que nos ocupa va a servirnos para ver que *dentro de este concepto general del área, conserva su validez la fórmula elemental del área de la Trigonometría esférica.* Como es sabido, el área del triángulo esférico con los ángulos $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sobre la esfera de radio 1 está dada por el llamado *exceso esférico* $(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi$, siempre que λ, μ, $\nu > 0$. Veamos ahora que esta fórmula es también cierta para nuestro triángulo ABC. Desde luego, el área del triángulo elemental $A'BC$ es igual a $(\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi$; de este valor tenemos que restar el área del huso AA', de ángulo $\lambda'\mu$, que es igual a $2\lambda'\mu$ (puesto que el área de un huso es proporcional a su ángulo y para el ángulo 2π—la esfera completa—vale 4π). Resulta, por lo tanto, como área de ABC:

$$(\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi - 2\lambda'\pi = (-\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi = (\lambda + \mu + \nu - 1)\pi .$$

De un modo semejante se deducirá probablemente que cuando en un triángulo propio general con ángulos y lados arbitrarios se quiere tender una membrana compuesta de varias partes, y se *determina su área como suma algebraica de las de sus partes, a las que se da el signo que les corresponde aplicando el principio de los signos, subsiste la fórmula del área* $(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi$, *donde, naturalmente, por* $\lambda\pi$, $\mu\nu$, $\nu\pi$ *se entienden los ángulos reales y efectivos de la membrana, y no, como anteriormente, los ángulos exteriores.* La investigación que exige este tema no ha sido realizada todavía, pero no creemos que encierre grandes dificultades y sería de desear que se emprendiese. En particular sería importante estudiar, desde el punto de vista de las consideraciones anteriores, *el papel de los triángulos impropios.*

Con esto damos ya por terminado lo que nos proponíamos decir acerca de la Trigonometría, y pasamos a la segunda importante aplicación de las funciones goniométricas, que también cae dentro de la enseñanza elemental.

B. Teoría de las pequeñas oscilaciones, y, en particular, del péndulo

Recordemos brevemente la deducción de las leyes del péndulo, que se acostumbra dar en la Universidad empleando el Cálculo infinitesimal. Consideremos un péndulo (fig. 74) de

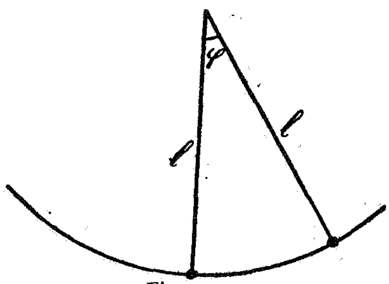

Figura 74

masa m y longitud l, y sea φ la amplitud de la semioscilación medida a partir de la posición de equilibrio. Puesto que el peso, mg, ejerce su acción hacia abajo en dirección vertical, se deduce fácilmente de las ecuaciones fundamentales de la Mecánica que el movimiento del péndulo está definido por la ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \varphi \qquad [1]$$

Para pequeñas amplitudes se puede sustituir sen φ por φ con suficiente aproximación; obteniendo, entonces, para las llamadas *oscilaciones infinitamente pequeñas del péndulo,* la ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{g}{l}\varphi \qquad [2]$$

La integral general de esta ecuación se expresa, como es sabido, por funciones circulares, que aparecen aquí gracias a sus propiedades diferenciales, como ya indicamos antes; esta integral general es

$$\varphi = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

donde A y B son constantes arbitrarias; o, escrita de otro modo, introduciendo las constantes c y t_0, llamadas *amplitud* y *fase* de la oscilación:

$$\varphi = C \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0), \qquad [3]$$

de cuya expresión se sigue para la *duración de una oscilación el valor* $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Completamente distinto al método seguido en estas sencillas consideraciones, que aun podrían hacerse más intuitivas, es el llamado *elemental,* que suele utilizarse en la enseñanza secundaria para deducir las leyes del péndulo. Ocurre que en tal enseñanza se elude por todos los medios el Cálculo infinitesimal y, al mismo tiempo, por la naturaleza misma de la cuestión, la Física exige su empleo, lo cual da lugar a un *método creado ad hoc,* que contiene ideas del Cálculo infinitesimal, pero sin nombrarlas, naturalmente, la consecuencia de este modo de proceder es una complicación extraordinaria, si se quiere proceder con rigor, y huyendo de esta complicación quedan realmente tales lagunas en el razonamiento que apenas puede hablarse ya de *demostración* de las leyes del péndulo. Y así se da el curioso fenómeno de que, acaso el mismo profesor, en una clase—la de Matemáticas—ponga el mayor cuidado en la exactitud lógica del razonamiento, a la que según su modo de ver, todavía influído por la tradición del siglo XVIII, no satisface el Cálculo infinitesimal, y, en cambio, en la clase siguiente—la de Física—echa mano sin escrúpulo de razonamientos muy discutibles, empleando audazmente los infinitamente pequeños.

Permítasenos recordar, para la más completa inteligencia del asunto, la marcha de la *deducción elemental de las leyes del péndulo* tal como aparece en los libros de texto y en la enseñanza. Se parte del *péndulo cónico,* es decir, de un péndulo que se mueve con *velocidad,* v, *constante sobre un círculo alrededor de la vertical que pasa por su centro como eje;* de modo que el hilo describe un cono circular (fig. 75). Este es el movimiento que se

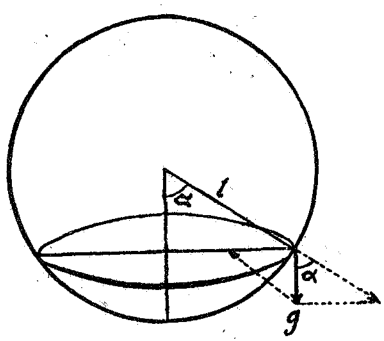

Figura 75

designa en Mecánica con el nombre de *precesión regular.* La posibilidad de tal movimiento se supone establecida experimentalmente, y la cuestión que se plantea es encontrar la *relación existente entre la velocidad,* v, *y el ángulo constante* $\varphi = \alpha$ *que mide la desviación del hilo de su posición vertical* (el semiángulo en el vértice del cono que describe).

Se observa en seguida que el extremo inferior del péndulo describe un círculo de radio $r = l \operatorname{sen} \alpha$, que puede reemplazarse por $r = l\alpha$, suponiendo α suficientemente pequeño, y se considera la *fuerza centrífuga,* deduciéndose la fórmula que relaciona ésta con la velocidad v del punto móvil en que actúa:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{v^2}{l \cdot \alpha}$$

a la cual debe oponerse para el mantenimiento del movimiento una fuerza igual, dirigida hacia el centro del círculo, llamada *fuerza centrípeta*. Pero ésta aparece como la segunda componente, $m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha$, del peso (fig. 75), cuando éste se descompone en una fuerza de dirección del hilo y otra en el plano del círculo, y como para valores suficientemente pequeños de α se puede sustituir $\operatorname{tg} \alpha$ por α, resulta:

$$m \cdot \frac{v^2}{l \cdot \alpha} = mg \cdot \alpha \quad \text{o} \quad v = \alpha \sqrt{g \cdot l}$$

La duración, T, de la oscilación del péndulo, esto es, el tiempo en el cual recorre toda la circunferencia $2\pi r = 2\pi l\alpha$, es, por lo tanto:

$$T = \frac{2\pi l \alpha}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

es decir, *la precesión regular del péndulo cónico—para un ángulo, α, de desviación suficientemente pequeño—es de una duración determinada, independiente de α.*

Examinemos brevemente esta parte de la deducción: podemos conceder, primeramente, como admisible la sustitución de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ por α, que también se emplea en nuestra deducción exacta (pág. 278); pues precisamente realiza el *paso de las oscilaciones finitas a las infinitamente pequeñas*. En cambio, se advierte que la fórmula empleada para la fuerza centrífuga sólo ha podido ser deducida «elementalmente» prescindiendo de ciertos conceptos cuya justificación estriba precisamente en el Cálculo diferencial; la misma *definición de fuerza centrífuga* exige en el fondo el concepto de la *segunda derivada*, cosa que la deducción elemental da como admitida. Por esto, cuando no se puede decir claramente de lo que se trata, surgen las mayores dificultades para la comprensión, que desaparecen por completo con el empleo del Cálculo diferencial. No hace falta entrar aquí en más pormenores, que puede ver el lector en algunos programas, muy dignos de ser leídos, del director del Realgymnasium de Güstrow, *H. Seeger* (*), y en un estudio muy interesante de *H. E. Timerding:* «Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern» (**). En los trabajos de *Seeger* se hace, entre otros, una crítica completa de la deducción de la fórmula de la fuerza centrífuga, desde nuestro punto de vista; la obra de *Timerding* contiene investigaciones de los métodos matemáticos usados tradicionalmente en la enseñanza de la física.

Sigamos con la deducción elemental de las leyes del péndulo. Hasta ahora sólo hemos obtenido *la posibilidad de un movimiento uniforme sobre un círculo;* si imaginamos en el plano de

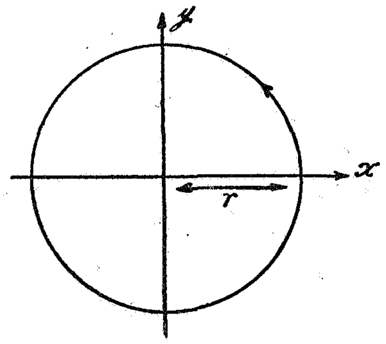

Figura 76

este círculo (esto es, en nuestros «descuidos» el plano tangente a la esfera) un sistema de ejes coordenados x, y (fig. 76), el movimiento está representado, en el lenguaje de la Mecánica racional, por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= l\cdot\alpha \cos\sqrt{\frac{l}{g}}\,(t-t_0) \\ y &= l\cdot\alpha\cdot\operatorname{sen}\sqrt{\frac{l}{g}}\,(t-t_0) \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

(*) Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Güstro ·, 1891, Schulprog. número 649). Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu dem Erlass des preussischen Unterricrtsministerium von 1892 (1893, N.° 653). Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechumg (1894, N.° 658).

(**) Tomo II, fascículo II de los «Abhandlungen der deutschen Unterausschusses der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission», Leipzig y Berlín, 1910.

Pero lo que queremos obtener son las *oscilaciones planas* del péndulo, es decir, el extremo del péndulo debe moverse sobre una recta del plano XY, el eje X, y la ecuación de su movimiento será, en consecuencia,

$$x = l \cdot C \cdot \cos \sqrt{\frac{l}{g}}\,(t - t_0), \qquad y = 0, \tag{5}$$

de lo cual resulta, para el ángulo de desviación $\varphi = \frac{x}{l}$, la ecuación [3]. Es, pues, necesario—obsérvese bien—pasar de las ecuaciones [4] a las [5] *sin poder hacer uso de las ecuaciones diferenciales de la dinámica*. Esto se logra estableciendo el *principio de la composición de pequeñas oscilaciones*, según el cual si son posibles dos movimientos x, y y x_1, y_1, también lo es el $x+x_1$, $y+y_1$. Entonces, se puede, en efecto, combinar el movimiento pendular hacia la izquierda [4] con uno hacia la derecha:

$$x_1 = l \, . \, \alpha \, . \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0), \qquad y_1 = - \, l \, . \, \alpha \, . \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\,(t - t_0);$$

y el movimiento $x+x_1$, $y+y_1$ es, en efecto, el buscado [5], si se toma $\alpha = \frac{C}{2}$.

En una crítica de estas consideraciones, debe examinarse ante todo cómo se puede establecer *el principio de la superposición sin utilizar el cálculo diferencial* o, a lo menos, cómo puede admitirse. Sobre todo, queda también siempre en estas exposiciones elementales el escrúpulo de si las diferentes circunstancias de que sucesivamente hemos ido prescindiendo, no formarán una masa que dé al final un error perceptible, aun cuando cada una de ellas sea por sí sola despreciable. No es preciso insistir más en esto; el lector puede por sí mismo juzgar; me limito a señalar que en cuanto hemos dicho de esta cuestión se trata de un *punto central en el problema de la enseñanza:* aparece en primer término, con toda claridad, *la necesidad de la consideración del Cálculo infinitesimal;* y, después, *la necesidad de una introducción general de las funciones goniométricas independientes de la Geometría del triángulo,* que permita tales aplicaciones generales.

Pasemos, finalmente, a la *última aplicación de las funciones goniométricas* de que nos proponemos tratar.

C. Representación de las funciones periódicas por series de funciones goniométricas (series trigonométricas)

Como es sabido, en Astronomía, Física matemática, ... se presentan a cada momento funciones periódicas que han de ser sometidas al cálculo, y entonces la representación que encabeza estas líneas es el recurso más valioso y del cual se hace un uso constante. Imaginemos, por razón de comodidad, elegida la unidad de modo que la función periódica $y = f(x)$ tenga el *período* 2π (fig. 77); se trata de averiguar *si se puede representar*

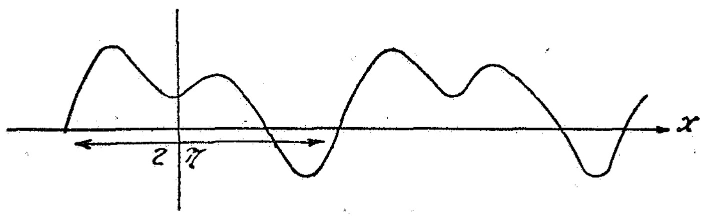

Figura 77

aproximadamente f(x) *por una suma de cosenos y senos de múltiplos enteros de* x *desde el primero hasta el enésimo, afectados de coeficientes constantes convenientemente elegidos;* es decir, si se podrá sustituir $f(x)$, con un error suficientemente pequeño, por una expresión de la forma:

$$\left.\begin{aligned} S_n(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\ &+ b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots + b_n \operatorname{sen} nx \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

El factor $\frac{1}{2}$, que afecta al término constante, tiene por objeto hacer completamente generales las expresiones que luego deduciremos para los coeficientes.

Hemos de comenzar, como en otras ocasiones, lamentando la exposición que ordinariamente se da de esta teoría. En lugar de considerar en primer término el problema elemental que acabamos de enunciar, lo plantean como si lo único interesante fuese la *cuestión teórica* a él aneja: saber *si puede representarse exactamente* f(x) *por una serie infinita*. Una honrosa excepción es, por ejemplo, la de *Runge*, en su *Theorie und Praxis der Reihen* (*). Y, sin embargo, este punto de vista teórico *no tiene para la práctica absolutamente ningún interés;* porque en ésta, naturalmente, siempre se suma un número finito de términos, que no es ni siquiera demasiado grande; pues hacerlo de otro modo no tendría ventaja alguna para el resultado práctico. Interesa observar que del solo hecho de ser convergente una serie no puede ya deducirse que sus primeros términos representen con alguna aproximación la suma; así como, recíprocamente, puede ocurrir en algunas ocasiones que los primeros pares de términos de desarrollos en series divergentes sean suficientes para obtener una buena representación práctica de una función. La importancia de esta observación radica en que quien solamente conozca la exposición ordinaria mencionada y quiera aplicar, por ej., en Física, las series trigonométricas, fácilmente caerá en error si no tiene en cuenta esta advertencia.

Todavía resulta más extraña esta omisión de las series trigonométricas finitas al ver que han sido estudiadas de un modo completo desde hace mucho tiempo; sus principales propiedades fueròn expuestas ya por el astrónomo *Bessel* en el año 1815. Puede hallar el lector más pormenores sobre la historia y bibliografía de este tema en el artículo de *Burkhardt* sobre *Trigonometrische Interpolation,* publicado en la Enciclopedia, t. II A 9, página 642 y siguientes.

Por lo demás, las fórmulas de que aquí se trata coinciden en lo esencial con las que aparecen en las demostraciones usuales de convergencia; sólo que las ideas que las asociamos tienen otro matiz y son más propias para su manejo por el práctico.

Vamos a tratar con algún detenimiento de la cuestión tal como la hemos planteado, para lo cual, hemos de hablar primero de la *determinación más conveniente de los coeficientes*

(*) Sammlung Schubert, XXXII, Leipzig, 1904.

a y b *para un número dado,* n, *de términos.* Para esto ha hecho uso *Bessel* de una idea tomada del *método de los mínimos cuadrados.* El error que se comete cuando se sustituye $f(x)$ en el punto x por la suma $S_n(x)$ de los $2n+1$ primeros términos de la serie trigonométrica es $f(x)—S_n(x)$, y *una medida de la bondad de la representación en todo el intervalo* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ *de un período de* f(x) *será la suma de los cuadrados de todos los errores; por consiguiente, la integral:*

$$J = \int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, dx$$

La aproximación más conveniente de f(x) *vendrá dada por la suma* $S_n(x)$, *tal que esta integral,* J, *sea un mínimo;* aplicando esta condición determinó *Bessel* los $2n+1$ coeficientes: a_0, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n. Pero para que exista el mínimo, puesto que J debe ser considerada como función de los $2n+1$ coeficientes a_0, ..., b_n, son condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dJ}{da_0} = 0, \quad \dfrac{dJ}{da_1} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{dJ}{da_n} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{dJ}{db_1} = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{dJ}{db_n} = 0, \end{array}\right\} \quad [2]$$

y siendo J una *función cuadrática esencialmente positiva de* a_0, ..., b_n, dedúcese fácilmente de aquí que *los valores de las variables determinados por estas* 2n+1 *ecuaciones dan realmente un mínimo de* J.

Diferenciando en estas ecuaciones bajo el signo integral, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} [f(x) - S_n(x)] \, dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} [f(x)-S_n(x)] \cos x \, dx=0, \ldots, \int_0^{2\pi} [f(x)-S_n(x)] \cos nx \, dx=0 \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} [f(x)-S_n(x)] \operatorname{sen} x \, dx=0, \ldots, \int_0^{2\pi} [f(x)-S_n(x)] \operatorname{sen} nx \, dx=0. \end{array}\right\} \quad [2']$$

Ahora bien; si efectuamos la integración del producto de $S_n(x)$ por un coseno o seno, se tiene, para $\nu=0, 1, 2, ..., n$:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos \nu x \, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos \nu x \, dx +$$

$$+ a_1 \int_0^{1\pi} \cos x \cos \nu x \, dx + \ldots + a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos \nu x \, dx$$

$$+ b_1 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \cos \nu x \, dx + \ldots + b_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos \nu x \, dx.$$

Según las propiedades elementales de las integrales de las funciones goniométricas, todos los términos del segundo miembro son nulos, salvo el término en que interviene el coseno con el índice ν, que vale $a_\nu \pi$; de modo que se tiene:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \cos \nu x \, dx = a_\nu \pi. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Para que esta fórmula general sea aplicable al caso de $\nu=0$, hemos tenido que poner el coeficiente a_0 bajo la forma $\frac{1}{2} a_0$. Exactamente del mismo modo se deduce:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx = b_\nu \pi. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

De estas sencillas relaciones se sigue que cada una de las ecuaciones [2] sólo contiene una de las $2n+1$ incógnitas; pudiéndose, por lo tanto, escribir ya:

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \nu \, dx, && (\nu = 1, 2, \ldots, n) \\ b_\nu &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx, && (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Sustituyendo estos valores, como supondremos siempre en adelante, en la expresión de $S_n(x)$, la integral J alcanzará, en efecto, un mínimo, cuyo valor es:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^2 + b_\nu^2) \right].$$

Una observación importante despréndese de aquí: *los valores obtenidos para los coeficientes son completamente independientes del número de términos tomados en la serie, y, por tanto, el coeficiente correspondiente a un término* $\cos \nu x$ *o* $\operatorname{sen} \nu x$ *conserva exactamente el mismo valor cuando se emplea este término solo o juntamente con cualesquiera otros para el cálculo aproximado de* f(x), *aplicando el mismo principio*. Si, por ej., se quiere encontrar un valor lo más aproximado posible de $f(x)$ utilizando un solo término con coseno, $a_\nu \cos \nu x$, deberá ser

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - a_\nu \cos \nu x]^2 dx = \text{mín.},$$

y se obtiene el mismo valor antes indicado para a_ν. Esto hace que este procedimiento de aproximación sea muy cómodo para la práctica; pues si se quiere aproximar una función cuya gráfica se asemeje a la del seno, utilizando un múltiplo de $\operatorname{sen} x$, y se ve después que esta aproximación no es suficiente, se podrán agregar otros términos (siempre atendiendo al principio de los mínimos cuadrados), sin tener que cambiar en nada el primero.

Veamos ahora *cómo la suma* $S_n(x)$ *así determinada se aproxima a la función dada* f(x). Para estas investigaciones me parece muy conveniente el empleo de un método en cierto modo experimental: dibujar para algunos casos concretos las gráficas de las *curvas de aproximación* $S_n(x)$; esto da una representación viva del objeto, y hace despertar el interés y el deseo de una explicación matemática aun en las personas de escasa preparación.

En una de mis anteriores lecciones (semestre de invierno 1903-4), en las que traté circunstanciadamente de estas materias, dibujó el señor *Schimmack*, ayudante mío a la sazón, unas figuras, algunas de las cuales vamos a considerar ahora:

1.º Ejemplos sencillos y que arrojan mucha luz, son los que derivan de *líneas compuestas de segmentos rectilíneos*. Supongamos, por ejemplo, la línea $y=f(x)$ que sube desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ en línea recta inclinada 45°, y desciende después con la misma pendiente hasta $x=\frac{3\pi}{2}$ y, por último, nuevamente sube, siempre con la inclinación de 45° hasta $x=2\pi$, continuando después periódicamente fuera del intervalo $(0,\ 2\pi)$. Calculemos los coeficientes que le corresponden: todos los a_ν serán nulos, puesto que $f(x)$ es función impar, y quedarán solamente los términos de senos y se obtendrá, como se ve fácilmente:

$$S(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^2}-\frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2}+\frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2}-+\dots\right)$$

En la figura 78 está diseñado el curso de las sumas limitadas al primero y a los dos primeros términos. Estas gráficas se acer-

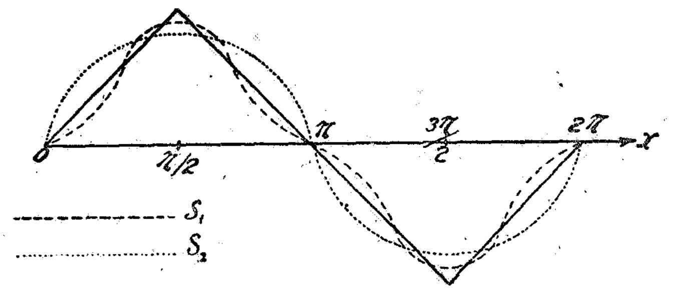

Figura 78

can cada vez más a la de la función $y=f(x)$, a medida que va aumentando el número de sus intersecciones con ella.

Especialmente es digno de observarse, que las curvas de aproximación se van comprimiendo más y más en los *vértices* de la línea, que corresponden a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, ..., aunque como funciones analíticas que son, no pueden tener ningún punto anguloso.

2.° Supongamos, ahora, que la línea $y=f(x)$ va de $x=0$ a $x=\pi$, siguiendo una recta de 45° de inclinación hacia arriba, que salta en $x=\pi$ hasta valer $-\pi$ y nuevamente sigue una recta inclinada 45° hasta $x=2\pi$, etc.; se compone, por lo tanto, de segmentos rectilíneos paralelos trazados por los puntos $x=0$, 2π,

4π, ..., del eje x. Intercalando en los puntos de discontinuidad los segmentos verticales que los unen, la función discontinua está representada por una línea quebrada continua (fig. 79) que

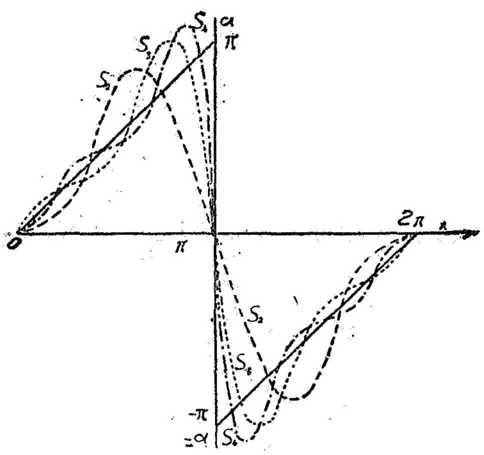

Figura 79

se asemeja al trazado de *palotes* con que se inicia la enseñanza de la escritura. También esta función es impar, de modo que no aparecen los términos con cosenos, y su desarrollo en serie es:

$$S(x) = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - + \ldots\right)$$

La figura representa las sumas de los dos, tres y cuatro primeros términos; también aquí es especialmente interesante observar cómo tienden las correspondientes gráficas a seguir las discontinuidades de $f(x)$; así, por ejemplo, van atravesando al eje x en el punto $x = \pi$ con una pendiente más pronunciada cada vez.

3.° El último ejemplo es el de una línea (fig. 80) cuya ordenada entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ es igual a $\frac{\pi}{2}$; entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ es igual a cero; entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π es igual a $-\frac{\pi}{2}$, y luego sigue repitiendo periódicamente estos valores. Como antes, intercalaremos en los puntos de discontinuidad segmentos verticales, obteniendo así una línea como la indicada con trazo lleno en la figura. También aquí sólo son diferentes de cero los coeficientes de los senos, puesto que se trata de una función impar, y su desarrollo es:

$$S(x) = \operatorname{sen} x + 2\,\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + 0 + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + 2\,\frac{\operatorname{sen} 6x}{6} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} 7x}{7} + 0 + \frac{\operatorname{sen} 9x}{9} + \ldots$$

La ley de los coeficientes no es tan sencilla en este caso como en los ejemplos anteriores y, en consecuencia, la sucesión de las curvas de aproximación, de las cuales se han trazado en

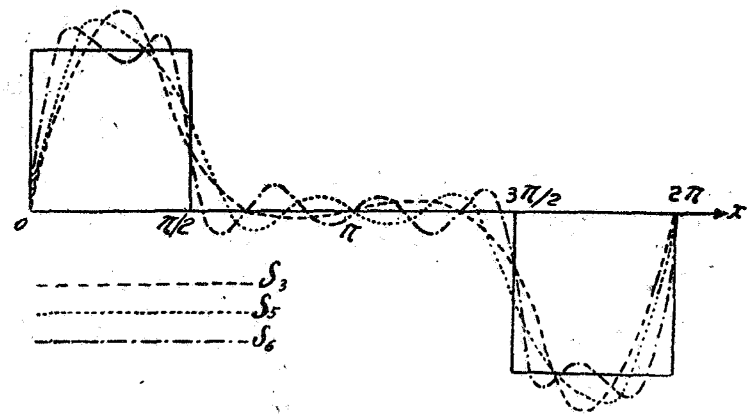

Figura 80

las figuras las correspondientes a sumas de los tres, cinco y seis primeros términos, no es tan clara como en aquellos anteriores.

Viene, ahora, el problema de determinar la cuantía del error que, para un determinado valor de x, se comete en general al sustituir $f(x)$ por la suma $S_n(x)$; hasta ahora nos hemos ocupado solamente de la integral de este error en todo el intervalo. Designemos por ξ la variable de integración que aparece en las integrales [3], página 287, que dan los valores de los coeficientes a_ν y b_ν con el fin de distinguirla del valor considerado, x, que suponemos fijo. Entonces podemos escribir así la serie finita:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \cos x \cos \xi + \ldots + \cos nx \cos n\xi \right.$$
$$\left. + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi + \ldots + \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} n\xi\right]$$

y efectuando la adición de cada par de sumandos en la misma columna, podemos escribir:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi \cdot f(\xi)\left[\frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \ldots + \cos n(x-\xi)\right]$$

La suma encerrada entre paréntesis puede efectuarse fácilmente, siendo probablemente el camino más cómodo el paso a la función exponencial compleja, y se obtiene así, extendiendo el intervalo de integración de $-\pi$ hasta π, como consecuencia de la periodicidad del integrando:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi \cdot f(\xi) \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\xi - x)}$$

Para llegar a tener una idea del valor de esta integral, dibujemos en primer lugar las curvas

$$\zeta = \pm \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\xi - x)}$$

en el intervalo $x-\pi \leqslant \xi \leqslant x+\pi$ del eje ξ; se obtienen así líneas de forma parecida a la de la hipérbola (fig. 81). Entre estas ramas de curvas oscila la curva

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(x-\xi)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\xi)} = \zeta \operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}(\xi - x),$$

y con tanta mayor frecuencia cuanto mayor sea n; para $\xi = x$, toma el valor $\eta = \frac{2n+1}{2\pi}$, que crece con n. Supongamos, ahora, para mayor sencillez, $f(\xi)=1$; entonces, $S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \eta \, d\xi$ representa, sencillamente, el área (rayada en la figura) limitada por la curva η y el eje de las ξ. Se ve inmediatamente, cuando se tiene algún sentido de la continuidad, que para n *suficientemente grande, los valores de las oscilaciones, tanto a la derecha como a la izquierda, que alternativamente son positivas y negativas, se compensan, y que sólo queda el valor del trozo central*

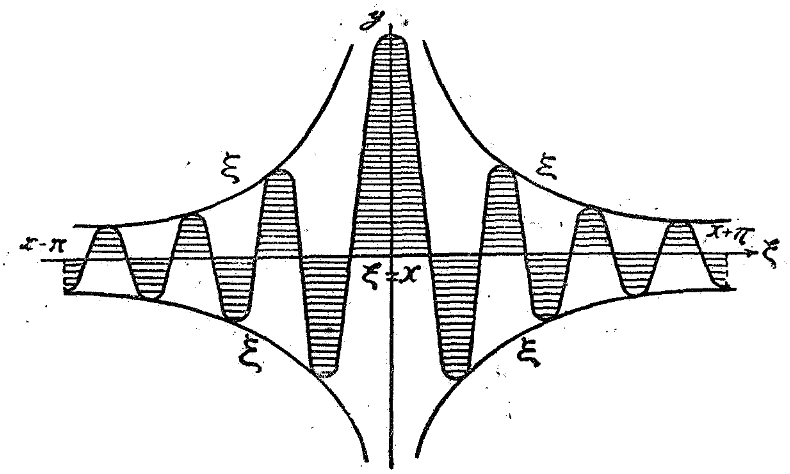

Figura 81

que se estrecha indefinidamente hacia arriba y tiene como límite al crecer n infinitamente, el valor $f(x)=1$, como se ve fácilmente. Lo mismo ocurre en general, siempre que $f(x)$ no presenta en $x=\xi$ una gran oscilación.

Estas mismas consideraciones sirven de fundamento a la demostración de convergencia de las series trigonométricas dada por *Dirichlet*, que fué publicada por primera vez en el tomo IV del Journal de Crelle, en 1829 (1); más tarde, en 1837, el mismo Dirichlet hizo una exposición más sencilla en el *Repertorium*

(1) Reproducido en Dirichlets Werken, tomo I; Berlín, 1889, pág. 117.

der Physik, de *Dove* y *Moser* (1). Hoy se encuentra ya esta demostración en la mayoría de los tratados; por consiguiente, no necesitamos entrar aquí en más pormenores, limitándonos a indicar las *condiciones suficientes que debe cumplir toda función para que pueda representarse por una serie trigonométrica.* Supongamos dada $f(x)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y prolongada periódicamente fuera de él; Dirichlet hace entonces las dos hipótesis siguientes, generalmente conocidas con el nombre de *condiciones de Dirichlet:*

a) Que $f(x)$ sea *parcialmente continua,* es decir, que en el intervalo $(0, 2\pi)$ sólo tenga un número finito de discontinuidades;

b) Que $f(x)$ sea *parcialmente monótona,* es decir, que se pueda dividir el intervalo $(0, 2\pi)$ en un número finito de intervalos parciales en cada uno de los cuales $f(x)$ no crezca, o no decrezca; en otros términos, que *sólo tenga un número finito de máximos y mínimos* (por esta razón son excluídas, por ejemplo, funciones del tipo $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$, porque en el punto $x=0$ se acumulan un número infinito de máximos y mínimos).

Dentro de estas condiciones, demuestra Dirichlet que *la serie trigonométrica infinita representa para cada valor de x en que la función es continua exactamente el valor f(x):*

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x)$$

Dirichlet demuestra, además, que *la serie es también convergente en los puntos, x, en que la función varía a saltos, y en cada uno de ellos tiende a la media aritmética de los límites de la función a la izquierda y a la derecha de x,* o, como se escribe ordinariamente:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

En la figura 82 se han representado estos puntos de discontinuidad y los valores que en ellos toma la serie.

(1) Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durcr Sinus und Cosinusreihen, Abgedruckt Werke, Bd. I, págs. 133-160 y Ostwalds Klassiker, núm. 116, Leipzig, 1900.

Estas condiciones de Dirichlet *sólo son suficientes, pero de ningún modo necesarias* para que $f(x)$ pueda representarse por la serie $S(x)$; pero, por otra parte, tampoco basta exigir simplemente la continuidad de $f(x)$, pues se pueden construir ejemplos de funciones continuas en las cuales se pueden acumular infinitas oscilaciones de tal manera que la serie $S(x)$ sea divergente.

Después de estas explicaciones teóricas, vamos a tratar del *lado práctico de las series trigonométricas,* recomendando al lector que desee una exposición más completa de las cuestiones relacionadas con ésta, la obra de *Runge* antes citada (pág. 285),

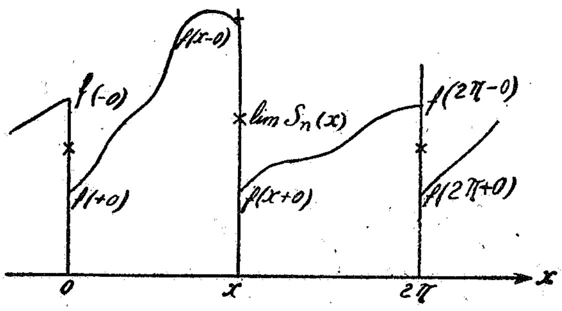

Figura 82

en la que encontrará con todo pormenor *el problema del cálculo numérico de los coeficientes de la serie,* es decir, la manera de calcular del modo más rápido y ventajoso posible las integrales que dan los valores de a_ν y b_ν correspondientes a una función dada.

Se han construído también *aparatos mecánicos especiales para el cálculo de estos coeficientes,* los llamados *analizadores armónicos.* Este nombre hace referencia a la importancia que, como es sabido, tiene en Acústica el desarrollo de una función, $y=f(x)$, en serie trigonométrica, problema que corresponde a *la descomposición de un sonido cualquiera* $y=f(x)$ (donde x es el tiempo e y la amplitud de la vibración) en «*sonidos puros*», es decir, vibraciones sinusoidales y cosinusoidales puras. El analizador construído por *Coradi,* de Zurich, permite determinar cada vez los coeficientes de seis términos de senos y cosenos

($\nu=1, \ldots, 6$) ; en total, 12 coeficientes ; el coeficiente $\frac{a_0}{2}$ se determina separadamente, con un planímetro. *Michelson* y *Stratton* han construído un aparato con el cual se pueden determinar hasta 160 coeficientes ($\nu=1, 2, \ldots, 80$) ; su descripción puede verse en el citado libro de Runge. El mismo aparato puede también, recíprocamente, sumar una serie trigonométrica dada de 160 términos, es decir, dados los coeficientes a_ν, b_ν, construir la función $f(x)$; naturalmente, este problema, desde el punto de vista práctico, es también de la mayor importancia.

El aparato de Michelson y Stratton ha hecho recaer nuevamente la atención sobre un fenómeno muy interesante y obser-

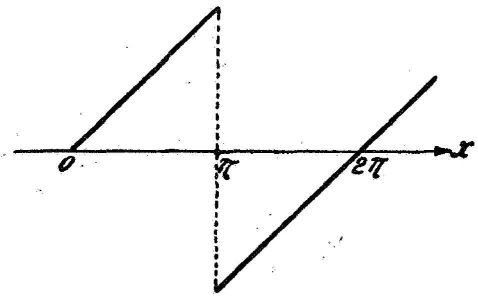

Figura 83

vado ya anteriormente (1), pero que había caído en el olvido. *Gibbs* ha hablado nuevamente de él en 1899 en «*Nature*» (2) y por eso se llama *fenómeno de Gibbs;* de él vamos a decir algo.

El teorema de Dirichlet da para valor de la serie trigonométrica correspondiente *a un valor determinado de x* el $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; en el segundo ejemplo antes tratado (para fijar la atención en un caso concreto), la suma de la serie así definida representa la función indicada en la figura 83 en los puntos aislados π, 3π, ... Ahora bien, nosotros habíamos in-

(1) Según la Enzyklopädie, tomo II, 12 (Trigonometrische Reihen und Integrale), *H. Wilbraham* conocía ya, y lo había estudiado y calculado, el fenómeno.

(2) Tomo 59, 1898-99, pág. 200. Scientific papers II, pág. 158, New-York, 1906.

terpretado ya la aproximación trigonométrica de modo distinto al que lo hace el procedimiento de Dirichlet, en el cual es fijo el valor de x y se hace crecer infinitamente n; *habíamos fijado* n *y considerado* $S_n(x)$ *con la variable* x y trazado las curvas sucesivas de aproximación $S_1(x)$, $S_2(x)$, ... La cuestión es ahora ver en qué se transforman estas curvas cuando n crece infinitamente, o, dicho aritméticamente, *hacia qué valores tienden las* $S_n(x)$ *cuando, suponiendo variable la* x, *se hace crecer* n *infinitamente*. Intuitivamente, es evidente que ahora la función límite no puede referirse, como antes, a *puntos aislados*, sino que ha de representar un trazo de línea continuo. A primera vista, parece natural pensar que esta curva se compondrá precisamente de las ramas continuas de $y=f(x)$, más los segmentos rectilíneos verticales que unen los puntos $f(x+0)$ y $f(x-0)$, correspondientes a las discontinuidades; en nuestro ejemplo, pues, la línea dibujada en la figura 79; pero la realidad no es

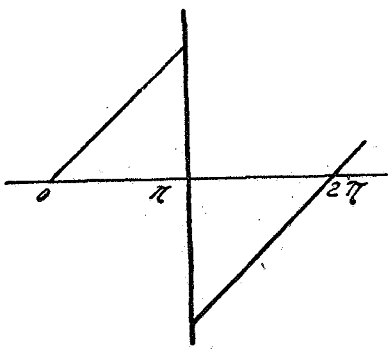

Figura 84

ésta, sino que se ve *que el trozo vertical de la línea límite sobresale siempre en un segmento finito por encima del punto* $f(x+0)$ *y debajo del* $f(x-0)$, en la forma representada en la figura 84.

Esto se había observado *experimentalmente* ya en las curvas dibujadas por el aparato de Milchelson, y se atribuyó al principio a inexactitudes del aparato, hasta que, por fin, *Gibbs* reconoció que así debía ser. Designando, en general, por D la magnitud del salto, $D = |f(x+0) - f(x-0)|$, *Gibbs* ha demostrado que las prolongaciones tienen una longitud igual a

$$-\frac{D}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\xi}{\xi}\,d\xi \sim \frac{1}{\pi}\,0{,}28\,D \sim 0{,}09\,D.$$

En lo que respecta a la demostración, basta efectuarla para una sola función discontinua, tal como la del ejemplo, puesto que todas las demás funciones de igual salto pueden deducirse de ella por adición de funciones continuas; la demostración no es muy difícil y se deduce inmediatamente de la fórmula integral de $S_n(x)$ (pág. 292). Por lo demás, trazando con cuidado un número suficiente de curvas de aproximación puede verse con toda claridad cómo se originan los salientes de Gibbs.

Sería muy interesante ver muchas otras particularidades que presentan estas curvas de aproximación, pero no podemos entrar en ello, pues nos llevaría demasiado lejos; al lector que le interese este asunto le remitimos a la memoria de *Fejér*, publicada en el tomo 64 de *Mathem. Ann.*, 1907, rica en contenido y de fácil lectura.

Con esto terminamos lo que nos proponíamos decir especialmente acerca de las series trigonométricas para hacer una

Excursión sobre el concepto general de función

que por su naturaleza, y también históricamente, se halla muy cerca de aquéllas.

Si, como acostumbramos, seguimos el proceso histórico de este concepto, observamos, primeramente, que en los autores más antiguos, como *Leibniz* y *los Bernoulli*, *sólo aparece el concepto de función en ejemplos particulares:* potencias, funciones trigonométricas, y otras análogas. No se encuentra formulado este concepto de un modo general hasta el siglo XVIII.

1.° En *Euler, por el año 1750* (para nombrar solamente números redondos), encontramos *dos definiciones distintas de la palabra función:*

a) *En su «Introductio» define y como función de x a toda expresión analítica en x,* es decir, a toda expresión compuesta de potencias, logaritmos, funciones trigonométricas, etc., de la variable x, sin expresar claramente cuáles pueden ser estas combinaciones. Establece ya la clasificación corriente de las funciones en algebraicas y transcendentes.

b) Junto a esto se ve que, para Euler, estaba también *definida una función* $y=f(x)$ *cuando, refiriéndola a un sistema de ejes coordenados,* x, y, *se da trazada una curva cualquiera «libero manus ductu»* (fig. 85). Euler no establece relación alguna entre ambas definiciones.

2.° *Lagrange* restringe extraordinariamente el concepto de función en su *Théorie des fonctions analytiques,* publicada alrededor de 1800, limitándolo al de las llamadas *funciones analíticas, que están definidas por series potenciales.*

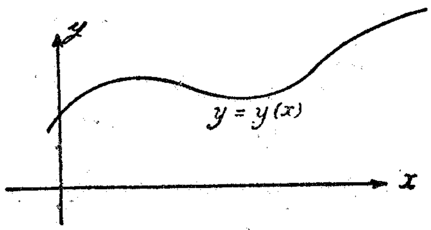

Figura 85

En la Matemática moderna se conserva esta denominación de «funciones analíticas» con el mismo significado, pero se demuestra que forman sólo una clase especial de las funciones que realmente se tratan en el Análisis. Ahora bien, al principio, una serie potencial:

$$y=P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

sólo definía una función en el *interior de su campo de convergencia,* y, por lo tanto, en un cierto entorno de x. Pero se encontró pronto un método que permite extender más allá el campo de definición de la función. Si, por ejemplo, x_1 (fig. 86) es un punto situado en el campo de convergencia de $P(x)$ y desarrollamos esta función en serie ordenada por las potencias ascendentes de $x-x_1$:

$$y=P_1(x-x_1),$$

puede ocurrir que el campo de convergencia de esta serie sea más amplio que el primero, apareciendo así definida la función en un campo más extenso, que aún puede aumentarse en muchos casos aplicando reiteradamente este procedimiento. Este proceso de la *prolongación analítica* es muy conocido por cuantos se han ocupado algo con la teoría de las funciones de variable compleja.

Obsérvese que cada uno de los coeficientes de la serie potencial $P(x)$ y, por consiguiente, *toda la función, y, está terminada cuando se conoce el curso de la función* y *a lo largo de un trozo tan pequeño como se quiera del eje de las x, p. ej., en un entorno del punto* $x=0$; pues con ello se conocen los valores de todas las derivadas de y para $x=0$, y se tiene, como es sabido:

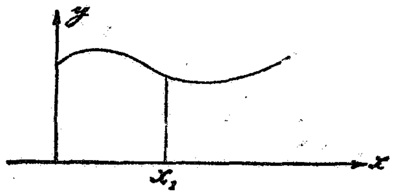

Figura 86

$$y(0)=a_0, \quad y'(0)=a_1, \quad y''(0)=a_2, \quad \dots$$

Una función analítica, en el sentido de Lagrange, está, por consiguiente, completamente determinada en la totalidad de su campo de variabilidad, cuando es conocida en un segmento tan pequeño como se quiera. Esta propiedad se encuentra en contraposición con el comportamiento de una función en el sentido de la segunda definición de Euler; puesto que ésta permite prolongar arbitrariamente cada elemento de una función.

3.° El concepto más completo de función se debe a *J. J. Fourier,* uno de los muchos matemáticos notables que había en París a principios del siglo XIX. Su obra principal es la *Théorie analytique de la chaleur* (1) que apareció por el año 1822, aunque la primera comunicación sobre esta teoría fué presentada ya en 1807 a la Academia de París. Esta obra es la fuente de

(1) Reimpreso en: *Fourier,* Oeuvres, t. I, París, 1888.

todos los métodos de la Física matemática actual, la cual puede ser caracterizada por la reducción de todos los problemas a la integración de ecuaciones de derivadas parciales con valores prescritos en el contorno, lo que constituye los llamados *problemas de contorno*. Fourier estudió, en particular, el *problema de la propagación del calor* que, en un caso sencillo, puede enunciarse de este modo: el contorno de una placa plana circular se mantiene de un modo permanente en un cierto estado de temperatura, p. ej., una parte a la temperatura del hielo fundente y la otra a la de ebullición del agua (fig. 87) *¿qué situación estacionaria, en orden a la temperatura, se crea como consecuencia del proceso de conductibilidad del calor?* Aquí se introducen,

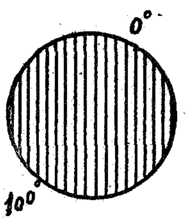

Figura 87

pues, los valores de contorno, que pueden ser dados en sus diferentes partes arbitrariamente e independientes entre sí, apareciendo, por lo tanto, nuevamente, la *segunda definición euleriana del concepto de función*, opuesta a la de Lagrange.

4.° Esta definición subsiste también en lo esencial en los trabajos de *Dirichlet* ya mencionados (pág. 293); la única variación estriba en estar traducida al lenguaje del Análisis, o —usando una palabra moderna—, *aritmetizada*. Y esto es, en efecto, necesario; pues, naturalmente, una curva, por fina que pudiera trazarse, nunca puede definir con exactitud la correspondencia entre los valores de x y de y, puesto que el trazo tiene un cierto espesor, lo cual obliga a que las longitudes correspondientes, x, y, sólo pueden medirse con un número limitado de cifras decimales.

Dirichlet formula el contenido aritmético de la segunda definición euleriana del siguiente modo: *Si, por cualquier medio, se hace corresponder a cada valor de x comprendido en un in-*

tervalo, un valor determinado de y, se dice que y es una función de x. De aquí se sigue que Dirichlet tenía ya *este concepto completamente general de función,* aunque siempre pensase, en primer término, en *funciones continuas o poco discontinuas,* como entonces se hacía generalmente; porque no es que no ideasen ejemplos de continuidades complicadas, sino que apenas se creía que pudieran ofrecer algún interés. Este punto de vista se refleja en Dirichlet cuando habla de los desarrollos en serie de *funciones completamente arbitrarias (ganz willkürlicher Funktionen)* empleando exactamente la misma expresión de Fourier *(fonctions entièrement arbitraires),* aunque luego formulase, como lo hizo, con toda precisión, sus *condiciones de Dirichlet* (pág. 294), a las cuales tenían que satisfacer las funciones por él consideradas.

5.° Debemos, ahora, notar que por esta misma época, alrededor del año 1830, empieza a *desarrollarse la teoría especial de funciones de variable compleja,* que, poco a poco, en los tres últimos decenios (1) próximamente, ha llegado a ser del dominio corriente de los matemáticos. Este desarrollo viene asociado, ante todo, a los nombres de *Cauchy, Riemann* y *Weierstrass;* los dos primeros parten de las *ecuaciones en derivadas parciales* que llevan sus nombres, a las que satisfacen las partes real e imaginaria, u, v, de la función compleja:

$$f(x+iy)=u+iv,$$

en tanto que Weierstrass define la función por una *serie potencial y el conjunto de todas sus prolongaciones analíticas;* con lo cual vuelve, en cierto modo, al concepto de Lagrange.

Lo verdaderamente notable de ésto es que en este paso al campo complejo se unifican *los dos diferentes conceptos de función antes expuestos.* Vamos, siquiera sea ligeramente, a ver cómo.

Consideramos la variable compleja $z=x+iy$ y la serie potencial:

$$f(z)=u+iv=c_0+c_1z+c_2z^2+\dots \qquad [1]$$

(1) Obsérvese que estas lecciones fueron explicadas por el profesor Klein el curso 1907-1908 (N. del T.).

que suponemos convergente para valores pequeños de $|z|$ y, define, en la terminología de Weierstrass, un *elemento de una función analítica*. Consideramos sus valores en un círculo suficientemente pequeño, de radio r y centro $z=0$, situado por entero dentro del campo de convergencia (fig. 88), es decir, sustituímos en

Plano z.

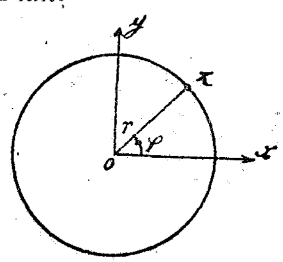

Figura 88

la serie potencial $z=x+iy=r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y resulta:

$$f(z)=c_0+c_1 r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)+c_2 r^2(\cos 2\varphi+i\,\mathrm{sen}\,2\varphi)+\ldots$$

Separando las partes reales y las imaginarias, será:

$$c_0=\frac{\alpha_0-i\beta_0}{2},\quad c_1=\alpha_1-i\beta_1,\quad c_2=\alpha_2-i\beta_2,\ \ldots$$

de donde se deduce para la parte real de la función $f(z)$:

$$\left.\begin{aligned} u=u(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}&+\alpha_1 r\cos\varphi+\alpha_2 r^2\cos 2\varphi+\ldots\\ &+\beta_1 r\,\mathrm{sen}\,\varphi+\beta_2 r^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi+\ldots;\end{aligned}\right\}\quad [2]$$

el signo negativo que aparece en las partes imaginarias de los coeficientes c lo hemos elegido para que todos los términos de $u(\varphi)$ aparezcan con signo positivo. La serie potencial que define $f(z)$ da, por consiguiente, para los valores que la parte real, u, toma en la circunferencia, considerada como función del ángulo φ, un desarrollo en serie trigonométrica de la forma ya tratada, cuyos coeficientes son α_0, $r^\nu\alpha_\nu$, $r^\nu\beta_\nu$.

Naturalmente, estos valores de u son funciones de φ en el sentido de Lagrange, siempre que la circunferencia (r) esté contenida por entero en el campo de convergencia de la serie potencial [1]. Si dicho círculo coincide con el «círculo de convergencia» de la serie [1], que constituye todo el campo de convergencia de la misma, no es preciso que la serie [1] y, por consiguiente, también la [2] no sea convergente y, en ese caso, los valores de $u(\varphi)$ pueden no ser funciones analíticas en el sentido de Dirichlet.

Recíprocamente, dada una *distribución de valores de* u(φ) «*arbitraria*» en la circunferencia (r), sin otra restricción que satisfacer a las «condiciones de Dirichlet», se puede desarrollar en una serie trigonométrica de la forma [2] y, con ello, quedan determinadas las magnitudes α_0, α_1, ..., β_1, β_2, ..., y, por consiguiente, todos los coeficientes de la serie [1] salvo la constante aditiva arbitraria $-\frac{i\beta_0}{2}$. Se puede entonces hacer ver que esta serie de potencias es también convergente dentro del círculo (r) y que *la parte real de la función analítica así determinada tiene los valores* u(φ) *en el contorno del círculo;* en términos más precisos, aquella parte real tiende al valor $u(\varphi)$ cuando φ tiende a un punto de continuidad de $u(\varphi)$.

Las demostraciones de ésto se deducen del comportamiento de las series de potencias en el interior de su círculo de convergencias, estudio en el que no podemos detenernos. Basten estas observaciones para hacer ver *cómo por este camino vienen a coincidir en cierto modo los conceptos de función de Lagrange y de Fourier-Dirichlet,* haciendo que la arbitrariedad que existe para los valores de la serie trigonométrica $u(\varphi)$ a lo largo de dicha circunferencia venga a concentrarse en un entorno del origen, tan pequeño como se quiera.

6.° Ahora bien, la Ciencia moderna no ha permanecido indiferente ante las dos concepciones expuestas; pues la Ciencia, como tal, no descansa nunca aun cuando aisladamente sus investigadores puedan fatigarse.

Así, en oposición a lo que como antes hemos dicho caracteriza el punto de vista de Dirichlet, se ha llegado en los tres últimos decenios, en el *estudio de las funciones reales, a funciones lo más discontinuas posible,* que, en particular, no satisfacen a las condiciones de Dirichlet; y se han encontrado los tipos de funciones más notables, que contienen singularidades complicadísimas acumuladas «en abigarrado montón». Lo que principalmente se trata de averiguar en estas investigaciones es hasta qué punto subsisten para estas funciones «anormales» las propiedades establecidas para las funciones «razonables».

7.° Por último, aún se liga a ésta una *generalización moderna, todavía más amplia, del concepto de función.* Hasta ahora, una función estaba definida siempre en cada punto del continuo de todos los valores reales o complejos, x, o, al menos, en cada punto de un intervalo o un recinto dados. Pero desde que el *concepto de conjunto,* debido a *G. Cantor,* ha ido colocándose, más cada vez, en primera línea, con lo cual el continuo de todos los x no es otra cosa que un ejemplo de un «conjunto» de puntos, han aparecido en gran número funciones que sólo necesitan ser definidas para los puntos de cualquier *conjunto arbitrario,* y se dice, de un modo general, que *y es función de x si a cada elemento de un conjunto de cosas x (números o puntos) corresponde un elemento de un conjunto y.*

Una distinción entre estos novísimos conceptos y los antiguos se echa de ver inmediatamente: Los enumerados en los párrafos 1.° á 5.° se han originado y han sido construídos en las aplicaciones a las ciencias naturales; basta para ello fijarse en el título de la obra de Fourier; en cambio, las investigaciones indicadas en los párrafos 6.° y 7.° son producto de especulaciones matemáticas puras, no debidas a necesidades planteadas por el estudio de los fenómenos naturales, y que hasta la fecha puede decirse que no han tenido aplicación directa alguna. Naturalmente, un optimista creerá que indudablemente llegará un momento en que se hagan estas aplicaciones.

Corremos, por último, este capítulo volviendo a nuestra cuestión de siempre: *¿Qué parte debe tomar la escuela de todas estas cosas?* ¿Qué es lo que debieran saber de las mismas el profesor y el alumno?

Digamos ante todo que no sólo es disculpable, sino perfectamente justificado, que la enseñanza secundaria se mantenga retrasada un cierto lapso de tiempo, seguramente algunos decenios, respecto de los progresos más recientes de nuestra ciencia, produciéndose lo que pudiéramos decir una cierta histéresis, tanto más significativa, por desgracia, cuanto que alcanza más de un siglo, ya que en dicha enseñanza se desconoce toda la obra de Euler, quedando, por lo tanto, para la reforma de sus planes de estudio todavía un campo muy vasto. Y lo que nosotros pedimos en la reforma es realmente bien modesto, cuando se compara con el estado actual de la ciencia. *Deseamos solamente que el concepto general de función de Euler en la forma restringida o en la más amplia penetre como un fermento en toda la enseñanza media; pero nunca por definiciones abstractas, sino por medio de ejemplos elementales—de los cuales hay en abundancia en el mismo Euler—que llegasen al alumno como algo vivo que le pertenece.* Claro es que hay que exigir más al profesor de matemáticas, quien sería conveniente que, por lo menos, conociese los elementos de la *Teoría de funciones de variable compleja;* y aun cuando no nos atrevemos a pedir otro tanto respecto de las más recientes concepciones de la teoría de conjuntos, parece, sin embargo, justo el deseo de que entre tantos profesores haya al menos, un pequeño número que, fuera de la cátedra, se ocupen en el cultivo de estas materias.

Hemos de agregar todavía algunas palabras sobre el papel importante desempeñado por la teoría de las series trigonométricas en todo este desarrollo. Datos históricos muy completos puede hallar el lector en la memoria de *Burkhardt*, titulada «*Entwikclungen nach oszillierienden Funktionen*» (especialmente en la 2.ª, 3.ª y 7.ª parte), una «memoria gigante», como solemos llamarla, que viene publicándose, en el tomo X del *Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung* (1), en cuya obra ha reunido más de 9.000 citas, conjunto tal de noticias bibliográficas, que seguramente no pueden encontrarse en ninguna otra parte.

El primero que llegó a la *representación de las funciones en general por series trigonométricas*, fué *Daniel Bernoulli*, hijo de Juan Bernoulli, que por el año 1760, estudiando el problema acústico de las cuerdas vibrantes, observó que la vibración ge-

(1) Terminada la publicación como cuaderno segundo de este tomo en dos semitomos. En el tomo II de la Enzyklopaedie figura un extracto. Las referencias de Burkhardt alcanzan hasta 1850; para los trabajos posteriores a esta fecha puede acudirse al artículo de *Hilb* y *Riesz* publicado en la Enzyklopaedie, II, C, 10.

neral de las cuerdas se puede representar por composición de las vibraciones sinusoidales correspondientes al tono fundamental y a los semitonos puros, lo cual envuelve el desarrollo en serie trigonométrica de la función que representa la forma de la cuerda.

Aunque en el conocimiento de estas series se progresó rápidamente, nadie creía que se pudiera representar por tales series cualquier función dada gráficamente. En el fondo de todo esto había ideas imprecisas que hoy nos son familiares y que pertenecen a la teoría de conjuntos. Se había supuesto de antemano, sin poderlo expresar, naturalmente, que el «conjunto» de todas las funciones arbitrarias, aunque se excluyan las discontinuidades, es mayor que el «conjunto» de todos los sistemas posibles de valores a_0, a_1, a_2, ... b_1, b_2, ... que representa la totalidad de todas las series trigonométricas.

Los conceptos precisos de la moderna teoría de conjuntos han arrojado sobre este asunto completa claridad y han probado que aquel prejuicio era falso. Permítame tratar con algún detenimiento esta importante cuestión. Se puede reconocer fácilmente *que se conoce el curso total de una función continua definida arbitrariamente en el intervalo* $(0, 2\pi)$, *por ejemplo, cuando sólo se conocen sus valores para los puntos racionales de este intervalo* (fig. 89), puesto que por formar estos puntos racionales un

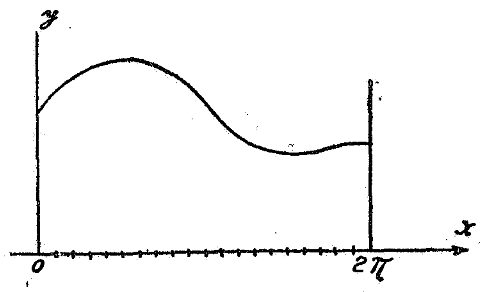

Figura 89

conjunto denso en todas partes dentro de dicho intervalo, se puede determinar con la aproximación que se quiera cualquier punto irracional por medio de una sucesión de puntos racionales, y, por la continuidad de la función, el valor $f(x)$ viene dado como límite de la sucesión de los valores que toma la función en los puntos racionales de aquella sucesión. Como, por otra parte, *el conjunto de los números racionales es «numerable»* (véase Apéndice II), es decir, se pueden colocar todos estos puntos de tal manera que a uno tomado como primero le siga un segundo, a éste un tercero, y así sucesivamente, resulta que dar una función continua cualquiera no es otra cosa que dar conjunto numerable de constantes—los valores que toma la función en los puntos variables correspondientes de aquella sucesión—exactamente de la misma manera que dar la sucesión numerable de constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$ equivale a dar una una serie trigonométrica; *de modo que aquella idea de que el conjunto de las funciones continuas sea, por su naturaleza, mayor que el de las series resulta completamente errónea.* Análogas consideraciones pueden aplicarse a las funciones discontinuas, con tal de que satisfagan a las condiciones de Dirichlet.

Más tarde volveremos sobre estos conceptos para tratarlos de un modo más completo.

Fourier fué el primero que desvaneció todas estas ideas equivocadas; de ahí la gran importancia de su obra en la historia de las series trigonométricas. Claro es que no dió estas razones, tomadas de la teoría de conjuntos, pero tuvo el valor de *creer* en la virtud representativa de las series trigonométricas y apoyado en esta fe expuso su validez, calculando algunos ejemplos característicos de funciones discontinuas, como las que antes hemos considerado. Los criterios generales de convergencia fueron demostrados más tarde, como ya hemos dicho, por *Dirichlet*, que era discípulo de Fourier. La obra de éste ha causado, por decirlo así, una revolución en la matemática, pues para los matemáticos de aquella época tenía que ser algo sorprendente el hecho de que pudieran representarse por medio de series de funciones analíticas, funciones arbitrarias formadas por leyes analíticas distintas en diferentes intervalos parciales de la variable independiente. En premio a este descubrimiento se dió entonces a las series trigonométricas el nombre de series de Fourier, con el que hoy son conocidas por todos, aunque toda denominación personal lleva consigo una parcialidad manifiesta, cuando no una absoluta injusticia.

Una *segunda contribución de Fourier* debemos mencionar, por último, siquiera sea brevemente; a saber, la consideración del *caso límite de las series trigonométricas*, que aparece cuando se hace creer *infinitamente el período de la función representada;* y puesto que una función de período infinitamente grande es una función no periódica arbitraria a lo largo del eje de las x, este caso límite da un *medio para representar también funciones no periódicas cualesquiera.* Este paso se realiza primero mediante una transformación lineal del argumento de la serie que hace representar funciones de cualquier período, l, en lugar del antes considerado, 2π, y después, haciendo crecer l infinitamente. De esta manera, la serie trigonométrica se transforma en la llamada *integral de Fourier:*

$$f(x) = \int_0^\infty [\varphi(\nu)\cos\nu x + \psi(\nu)\operatorname{sen}\nu x]\,d\nu,$$

con lo cual, $\varphi(\nu)$ y $\psi(\nu)$ se expresan, en cierto modo, como *integrales desde* $-\infty$ *hasta* $+\infty$ *de la función* $f(x)$. Lo nuevo es, pues, que el índice ν recorre de un modo continuo *todos* los valores desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en lugar de recorrer sólo los valores 0, 1, 2, ..., y que, en consecuencia, las funciones $\varphi(\nu)$ y $\psi(\nu)$ aparecen en lugar de los coeficientes a y b.

Dejando ya el estudio de las funciones transcendentes elementales que han sido hasta ahora el objeto de nuestras consideraciones sobre el Análisis, vamos a tratar en un último capítulo, del Cálculo infinitesimal propiamente dicho.

III. Del Cálculo infinitesimal propiamente dicho

Suponemos, naturalmente, que el lector sabe diferenciar e integrar y que estas operaciones las ha practicado repetidas veces. Aquí vamos a tratar de cuestiones generales, como la *fundamentación lógica y psicológica* de la enseñanza de esta disciplina, y otros temas de carácter análogo.

1. Principios generales del Cálculo infinitesimal

Comencemos por una *observación general acerca de la naturaleza de la Matemática.* Se oye decir a los no matemáticos, en particular a los filósofos, que la *Matemática se ocupa solamente* *en deducir consecuencias lógicas de premisas claramente establecidas,* siendo completamente indiferente lo que dichas premisas puedan significar y que sean verdaderas o falsas, con tal que no sean contradictorias. Por el contrario, todo aquel que ha trabajado con fruto en investigaciones matemáticas tiene que hablar de otro modo. En efecto, juzgan los primeros tan sólo por la forma regular en que cristaliza la exposición de todas las teorías matemáticas perfectamente acabadas, pero el *investigador* trabaja en la Matemática, como en cualquier otra ciencia, no de aquella manera rigurosamente deductiva, sino *sirviéndose esencialmente de su fantasía y procediendo por inducción apoyado en recursos puramente heurísticos.* Se pueden presentar numerosos ejemplos de grandes matemáticos que han encontrado los resultados más importantes sin poder demostrarlos exactamente. ¿Va a decirse por ésto que tales grandes aportaciones no deben tenerse en cuenta, y que, según aquella concepción, no constituyen obra matemática, y sólo los sucesores del descubridor que, al fin, encontraron sencillas demostraciones de dichas propiedades merecen el calificativo de matemáticos? Además, resulta caprichoso el uso que quiere darse a esta palabra; pues, mirando las cosas sin apasionamiento, no puede negarse que *el trabajo inductivo del que establece por primera vez una proposición, es de tanto valor, por lo menos, como el deductivo de los que la demuestran por primera vez,* ya que ambos trabajos son igualmente necesarios, y el descubrimiento de la hipótesis de la conclusión posterior.

Precisamente en el descubrimiento y formación del Cálculo infinitesimal ha ejercido un gran papel este procedimiento inductivo que no se apoya sobre deducciones lógicamente encadenadas y *el recurso heurístico más eficaz, fué muy frecuentemente, en este caso, la intuición sensible;* y me refiero al decir esto a la intuición sensible *inmediata* con todas sus inexactitudes, en la que, por ejemplo, toda curva trazada tiene siempre un cierto grueso, *no a la intuición abstracta,* la cual postula ya como realizado el paso al límite que lleva a la línea matemática unidimensional. Comprobaremos tal afirmación cuando, en el curso de esta exposición, vayamos viendo cómo se han ido moldeando históricamente los conceptos del Cálculo infinitesimal.

Consideremos, en primer término, el *concepto de integral;* históricamente empieza con el *problema de evaluación de áreas y volúmenes* (*cuadraturas y curvaturas*). La definición lógica y abstracta determina la integral $\int_a^b f(x)dx$, es decir, el área limitatada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las ordenadas $x=a$, $x=b$, como *límite de sumas de rectángulos muy estrechos inscritos o circunscritos a esta área*, cuando su número crece infinitamente al mismo tiempo que sus bases decrecen indefinidamente; en cambio, la intuición sensible considera el área en cuestión no como límite, sino sencillamente como la *suma de muchos rectángulos muy estrechos;* pues, dada la ineludible inexactitud del dibujo, tendríamos que poner pronto fin a la reducción del tamaño de los rectángulos (fig. 90).

Este modo ingenuo de pensar se encuentra, en efecto, en todos los grandes investigadores en el período de generación del

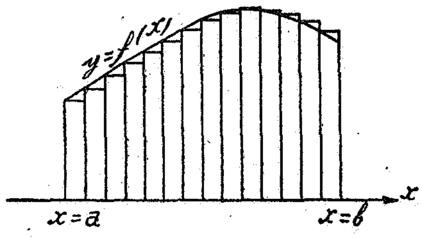

Figura 90

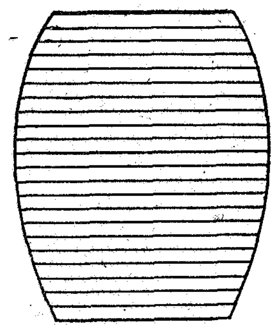
Figura 91

Cálculo infinitesimal. Podemos citar aquí, primeramente, a Keplero, el cual en su «*Nova stereometrio doliorum vinariorum*» (1) se ocupó con la cubicación de los cuerpos. Su interés principal se concentró en la determinación de la capacidad de los toneles y de su forma más conveniente; colocándose completamente en el punto de vista que acabamos de indicar. Imaginaba el tonel, lo mismo que cualquier otro cuerpo (fig. 91), como compuesto de *gran número de hojas delgadas*, de papel, por ejemplo, colocadas

(1) Linz, 1615; reproducido en los clásicos de Ostwall, núm. 165, Leipzig, 1908.

unas encima de otras, y medía su volumen como suma de los de estas hojas, cada una de las cuales constituye un cilindro. De modo análogo procedía en el cálculo de los *cuerpos geométricos sencillos,* como la *esfera,* por ejemplo. La suponía formada por gran número de *pequeñas pirámides,* con el vértice común en el centro (fig. 92) y entonces resulta el *volumen, según la conoci-*

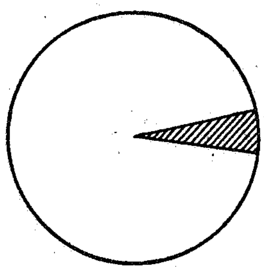

Figura 92

da fórmula de la pirámide, igual al producto de $\frac{r}{3}$ por la suma de todas las bases de las pequeñas pirámides, y reemplazando la superficie formada por estas facetas por la superficie esférica, o sea por $4\pi r^2$, obtenía la fórmula exacta $\frac{4}{3}\pi r^3$. Por lo demás, Keplero hace constar expresamente el valor práctico y puramente heurístico de tales consideraciones, relegando lo que concierne a una demostración matemática *rigurosa* al llamado *método de ex haución.* Este método, que ya había sido aplicado por Arquímedes, conduce, por ejemplo, a la determinación del área del círculo, sustituyéndola por la de los polígonos inscritos y circunscritos cuyo número de lados crece infinitamente al mismo tiempo que la longitud de los mismos tiende a cero. La diferencia esencial con la manera moderna de ver estriba en que, implícitamente, se admitía la existencia del número que mide el área del círculo como algo de absoluta evidencia, mientras que el Cálculo infinitesimal moderno prescinde de esta evidencia intuitiva y, basándose en el concepto abstracto de límite, define el área como valor límite de las áreas de los polígonos inscritos. Pero una vez establecida la existencia del área, el método de exhaución es un método completamente exacto, que satisface también a las exigencias modernas, y sirve para calcular aproximadamente aquella área partiendo de otras conocidas de figuras poligonales. Sin embargo, se ve en muchos casos que este procedimiento es extraordinariamente difícil de aplicar y poco apropiado para *encontrar* los valores de áreas y volúmenes. Un escrito de Arquímedes descubierto por H. Heiberg en 1906 (1) demuestra que aquel matemático no aplicó nunca el procedimiento de exhaución, sino que una vez que había encontrado el resultado, buscaba el modo de demostrarlo rigurosamente por exhaución. Para llegar a sus descubrimientos, utilizaba las consideraciones tales como la de que triángulos y segmentos de parábola están formados por series de cuerdas paralelas, o que cilindros, conos y esferas están formados por series de discos circulares.

Volviendo a lo que decíamos del siglo XVII, encontramos razonamientos análogos a los de Keplero en el libro del jesuíta *Buenaventura Cavalieri*, titulado «*Geometría indivisibilibus continuorum*» (2), donde establece el principio que hoy se conoce

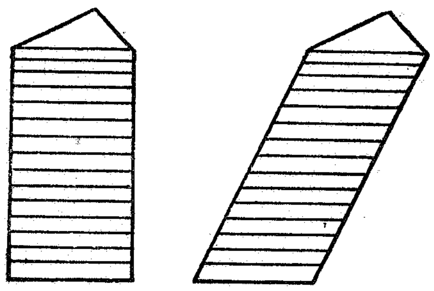

Figura 93

con su nombre: *Dos cuerpos son equivalentes cuando las secciones planas correspondientes a alturas iguales tienen áreas iguales.* De este *principio de Cavalieri* se habla mucho en nuestras escuelas; se cree poder evitar con su uso el empleo del Cálculo integral cuando realmente a éste pertenece por entero. La manera de establecerlo Cavalieri viene a reducirse a imaginar los dos cuerpos formados por discos delgados superpuestos, los cuales, según la hipótesis hecha, pueden considerarse dos a dos iguales

(1) Citado ya en la pág. 117.
(2) Bononiae, 1635; primera edición, 1653.

en área; es decir, uno cualquiera de los cuerpos se puede considerar deducido del otro por traslación de los diferentes discos (fig. 93), en cuya operación no puede variar el volumen total, puesto que aparece formado por sumandos iguales, tanto antes como después de la traslación.

De un modo completamente semejante nos lleva la intuición primitiva al concepto de *derivada de una función,* es decir, al de tangente a una curva. Se sustituye aquí—y así se ha hecho realmente—la curva por una línea poligonal (fig. 94), cuyos vértices

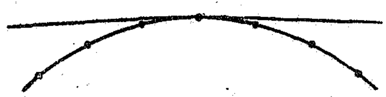

Figura 94

están sobre la curva y muy próximos entre sí. Según la naturaleza de nuestra intuición sensible mirando la figura desde alguna distancia, apenas puede distinguirse la curva de la sucesión de estos puntos y aún menos de la línea poligonal. La tangente a la curva aparece así simplemente como *recta de unión de dos de estos puntos consecutivos*; por lo tanto, como prolongación de uno cualquiera de los lados del polígono. Desde el punto de vista abstracto y lógico, esta recta, por muy próximos que supongamos los dos vértices que une, naturalmente nunca deja de ser una *secante,* y la *tangente es la posición límite a la cual se aproxima indefinidamente cuando la distancia entre ambos puntos tiende a cero.* Análogamente se concibe, desde el punto de vista de la intuición sensible, como *círculo de curvatura* de una línea, al *círculo* que pasa por *tres vértices consecutivos de aquel polígono*; mientras que, considerando rigurosamente, el círculo de curvatura *es la posición límite de aquél cuando los tres puntos tienden a confundirse en uno por la anulación de sus distancias mutuas.*

La *fuerza convincente* que llevan consigo tales consideraciones intuitivas varía mucho, naturalmente, de una a otra persona. Muchos hay—y yo me cuento entre ellos—que se consideran extraordinariamente satisfechos con ella; otros, en cambio, dotados de un espíritu excesivamente lógico, encuentran tales intuiciones absolutamente vacías de sentido y no aciertan a imaginar cómo puedan ser base de consideraciones matemáticas. Y, sin embargo, históricamente, los razonamientos de esta especie han constituído frecuentemente el principio de nuevos fructíferos métodos de demostración.

Y no es sólo esto; todavía hoy se recurre a estos conceptos intuitivos, e involuntariamente se les concede validez en la *Física matemática,* en la *Mecánica,* en la *Geometría diferencial,* cuando se quiere introducir alguna consideración matemática, porque, como el lector sabe, son muy apropiados para ello, lo cuál no impide, claro es, que el matemático puro se burle con frecuencia de esta manera de tratar las cosas; cuando yo estudiaba, se decía que para el físico la diferencial es una pieza de latón que maneja lo mismo que sus aparatos.

En este respecto debemos estimar el valor que encierra la *notación de Leibniz,* hoy generalizada; pues asocia *al recuerdo de la intuición simple* una cierta indicación del abstracto *paso al límite,* realmente contenido en los conceptos. Así, la notación diferencial de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ recuerda en primer término que procede de un cociente de diferencias, pero la d, en contraposición con el signo Δ que se usa para diferencias finitas, indica que aquí hay algo nuevo, precisamente el *paso al límite.* Análogamente, $\int y dx$ indica el origen de la integral como una *suma* de pequeñas magnitudes; pero no emplea el signo ordinario Σ sino una S estilizada (es de notar que no es generalmente conocida esta significación del signo $\int$) que indica la aparición de un nuevo proceso de sumación.

Vamos, por último, a entrar ya en la exposición de los *fundamentos lógicos del Cálculo diferencial e integral,* empezando por su *evolución histórica.*

1.° *La idea fundamental,* como se enseña ya en los grados superiores de la enseñanza media y, por consiguiente, no necesitamos más que recordarla brevemente, en el *Cálculo infinitesimal es simplemente una aplicación del concepto general de límite.* Se define la *derivada como límite del cociente de incrementos finitos correspondientes de la función y la variable;*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

—supuesto que este límite exista—, pero sin que pueda creerse que es un cociente, en el cual dy y dx tengan una significación propia independiente. Análogamente, se define *la integral definida como límite de una suma*:

$$\int_a^b y\,dx = \lim_{\Delta x_i = 0} \Sigma\, y_i \,\Delta\, x_i$$

donde los símbolos Δx_i representan intervalos finitos parciales del intervalo $a \leqq x \leqq b$, y las y_i valores cualesquiera que toma la función en ellos, y todos los Δx_i tienden simultáneamente a cero; sin que tampoco pueda creerse que $y\,dx$ tiene el significado de sumando de una suma. Estas notaciones se conservan por razones de comodidad, como antes se ha dicho.

2.° Esta concepción se encuentra ya expresada en forma muy precisa en *Newton* mismo; remitimos al lector a un pasaje de su obra principal: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1) del año 1687, en el que dice: «*Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum.*» Por lo demás, elude en absoluto Newton en la exposición de esta obra el Cálculo infinitesimal, como tal, aunque ciertamente lo haya utilizado para la obtención de sus resultados; pues la memoria fundamental en la cual expone su método del Cálculo infinitesimal la había ya escrito en el año 1671, aunque no fuese publicada hasta 1736, con el título *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (2).

En ella expone Newton el nuevo Cálculo en *numerosos ejemplos*, sin entrar en explicaciones sobre los fundamentos. Enlaza su teoría con una *representación de la vida diaria*, que está lindando con el paso al límite: así, al determinar un *movimiento* $x = f(t)$ sobre el eje x, en el tiempo t, todo el mundo tiene idea

(1) Nueva edición de W. Thomson y H. Blackburn, pág. 38. Glasgow, 1871.
(2) J. Newtoni, Opuscula mathematica, philosophica et philologica, T. I. Lausannee, 1744, pág. 19.

intuitiva de lo que es la *velocidad* de tal movimiento, y cuando se examina más detenidamente este concepto, se ve que, en el fondo, se piensa en el valor límite del cociente de diferencias $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ *Esta velocidad, con la cual varía la variable x en el tiempo, es la llamada por Newton «fluxión de x» representándola por x y la toma por base de sus consideraciones.* Supone todas las variables *x, y,* dependientes de una *variable primitiva,* t, *el tiempo* ; la derivada $\frac{dy}{dx}$ aparece, según esto, como *cociente de los fluxiones* $\frac{y}{x}$, lo que nosotros hoy escribiríamos de este modo $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$.

3.° A esta concepción newtoniana se asocia una larga serie de *matemáticos del siglo* XVIII, los cuales edifican el Cálculo infinitesimal, con más o menos precisión, sobre el concepto de límite. Permítasenos entresacar aquí solamente algunos nombres : *C. Maclaurin* en su *Treatise of fluxions* (1) que, como libro de texto, ejerció gran influencia en un campo muy vasto ; *D'Alembert* en la gran *Encyclopédie méthodique* francesa ; y, por último, *Kästner* en Gotinga con sus lecciones y libros (2). Finalmente puede incluirse también a *Euler* como principalmente comprendido en esta fase del Cálculo, aunque en él se adviertan también ya otras tendencias.

4.° Una laguna muy esencial quedó por llenar en todas estas exposiciones, antes de que se pudiese hablar de un *sistema lógico de Cálculo infinitesimal.* Cierto que se había definido la derivada como límite, pero faltaba un medio que permitiese la operación recíproca : deducir de su valor *el incremento de la función en un intervalo finito.* Esto se consiguió ante todo por el llamado *teorema del valor medio* ; y es el gran mérito de *Cauchy* haber reconocido la posición central de este teorema y, en consecuencia, haberlo colocado como fundamento del *Cálculo diferencial* ; lo cual hace que, con toda justicia, se repute a Cauchy como *fundador del Cálculo infinitesimal exacto,* en el sentido moderno. Como obras fundamentales podemos citar sus

(1) Edinburgh, 1742.
(2) Kästner, A. G. Anfangsgıünde der Analysis des Unendlichen. Göttingen, 1760.

lecciones de París: *Resumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1); así como su segunda edición *Leçons sur le calcul différentiel* (2), de la que sólo ha aparecido la primera parte.

El *teorema del valor medio* se enuncia así: *Si* $f(x)$ *es una función continua derivable en todos los puntos del intervalo considerado, existe siempre entre* x *y* $x+h$ *un punto,* $x+\theta h$, *tal que es:*

$$f(x+h)=f(x)+h\,.\,f'(x+\theta\,h), \qquad 0<\theta<1.$$

La aparición del factor θ, característico de este teorema, suele sorprender a los principiantes. Geométricamente, el teorema es sobremanera intuitivo; expresa simplemente que *entre los puntos* x *y* $x+a$ *de la curva hay un punto,* $x+\theta h$, *tal que la tangente en él a la curva es paralela a la secante que une los puntos* x *y* $x+h$ (fig. 95).

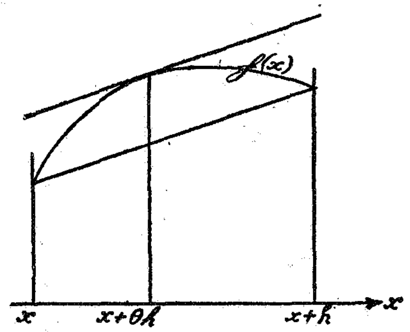

Figura 95

5.° ¿Cómo demostrar ahora *aritméticamente y con rigor el teorema del valor medio,* sin apelar a la intuición geométrica? Una demostración de esta naturaleza significa reducir el teorema a las definiciones aritméticas antes expuestas, abstractas y formuladas de modo preciso, de variable, función, continuidad, etc. Por esto, quienes primero han propagado una demostración completamente rigurosa han sido Weierstrass y sus sucesores, a los cuales se debe también haber extendido la moderna concepción aritmética del continuo de los números. Vamos a señalar aquí solamente las fases características de esta demostración.

(1) París 1823. Oeuvres complétes; Ser. II. T. IV, París, 1899.
(2) París 1829. Oeuvres complétes; Ser. II. T. IV, París, 1899.

Primeramente se puede reducir el teorema al caso más sencillo de ser horizontal la cuerda del arco, es decir, que $f(x) = f(x+h)$ (fig. 96) y entonces se prueba la *existencia de un punto de tangente horizontal.* Para ello se puede utilizar el teorema de Weierstrass, que dice: *toda función continua en un intervalo cerrado toma en uno, al menos, de los puntos de este intervalo el máximo (y el mínimo) de sus valores.* Dentro de nuestra hipótesis, uno de estos valores extremos lo debe tomar segura-

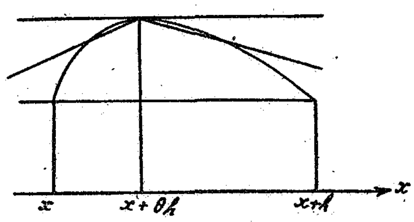

Figura 96

mente en el *interior* del intervalo $(x, x+h)$, salvo el caso trivial en que se tratara de una constante. Supongamos que sea un máximo el que tome en el punto $x+\theta h$ (de modo completamente análogo se razona en el caso del mínimo); entonces no toma $f(x)$, tanto a la derecha como a la izquierda de este punto, valores superiores a este máximo, es decir, el cociente incremental es por la derecha negativo o nulo y por la izquierda positivo o nulo. Así, pues, la derivada, que por hipótesis existe, puede aparecer en el punto $x+\theta h$ tanto como límite de valores no positivos, como de valores no negativos, según que el paso al límite del cociente de incrementos se realice por la derecha o por la izquierda de aquel punto; lo cual exige que dicha derivada sea nula, y con ello queda demostrada la existencia de la tangente horizontal, y, por lo tanto, el teorema del valor medio.

Paralelamente a la orientación bosquejada en los párrafos anteriores, sobre la cual se construye la actual ciencia matemática, ha venido propagándos durante siglos *una concepción esencialmente diferente del Cálculo infinitesimal,* la cual se reduce:

1.° *A las antiguas especulaciones metafísicas sobre la constitución del continuo,* integrado por elementos que no pueden descomponerse más, los llamados «infinitamente pequeños». Ya en la *antigüedad* hallaron acogida tales representaciones, primero en los *escolásticos* y más tarde en los filósofos jesuítas. Como signo característico citemos aquí el título del ya mencionado (pág. 313) libro de Cavalieri *Geometría indivisibilibus continuorum,* que indica claramente su verdadera concepción fundamental ; y, en efecto, en él sólo incidentalmente aparecen consideraciones intuitivas de matemática de aproximación, pues realmente considera al espacio como supuesto de partes elementales indivisibles, las «Indivisibilia». Sería de gran importancia e interés en este respecto conocer las sucesivas transformaciones que ha ido sufriendo el concepto del continuo en el curso de los siglos.

2.° Este mismo modo de ver era el de *Leibniz,* que con Newton participa en la gloria del descubrimiento del Cálculo infinitesimal. Para él *no es primario la derivada como límite,* sino que *la diferencial* dx *de las derivables* x *tiene existencia real como elemento último indivisible del eje de abscisas,* como una cantidad menor que cualquier magnitud finita, pero no nula *(un infinitamente pequeño «actual»).* De modo análogo vienen definidas las *diferenciales de órdenes superiores* d^2x, d^3x, ..., como cantidades infinitamente pequeñas de 2.°, 3.°, ... orden, cada una de las cuales es «infinitamente pequeña respecto de la anterior». Se tiene así una serie de sistemas de magnitudes cualitativamente diferentes. El área comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje de abscisas y dos ordenadas, en la *teoría de los indivisibles* es exactamente la suma de todas las ordenadas intermedias, y una consecuencia de este modo de ver es que Leibniz en su primer manuscrito (1675) escribía $\int y$ y no $\int y\,dx$.

Esta concepción no es, sin embargo, la que domina en toda la obra de Leibniz antes bien, aparecen incidentalmente consideraciones intuitivas de *matemática de aproximación,* según las cuales *la diferencial dx es un segmento finito, pero tan pequeño que a lo largo de él la curva coincide sensiblemente con la tangente.* Aquellas especulaciones metafísicas son ciertamente sólo una idealización de los sencillos hechos psicológicos aquí contenidos.

De un modo particular aparece en Leibniz todavía una tercera modalidad, característica suya : la *concepción formal.* Ya hemos tenido ocasión de señalar que Leibniz es el fundador de la

Matemática formal; su idea es ésta: Es completamente indiferente el significado real que puedan tener las diferenciales, o que realmente no tengan ninguno; lo único necesario es definir las operaciones de tal modo que pueda calcularse exactamente con aquellas magnitudes; entonces, siempre los resultados son ciertos. Leibniz nos muestra que ocurre aquí algo análogo a lo que acontece con los números complejos, sobre los cuales tenía una idea completamente semejante. En lo que respecta a las *reglas de diferenciación*, trátase en esto, principalmente, de la fórmula:

$$f(x+dx)-f(x)=f'(x)\,dx.$$

El teorema del valor medio demuestra que sólo es cierta cuando se pone $f'(x+\theta\,dx)$ en lugar de $f'(x)$, pero el error que aquí se comete al escribir $f'(x)$ es *infinitamente pequeño de orden superior (segundo) y tales cantidades deben despreciarse en el cálculo con diferenciales*, lo cual es la ley formal fundamental.

Las publicaciones más importantes de Leibniz están contenidas en aquella célebre revista, la primera científica, *Acta eruditorum* (1) de los años 1684, 1695 y 1712. En el primer tomo se encuentra, bajo el título «Nova methodus pro maximis et minimis» (pág. 467 y sig.) la primera publicación sobre Cálculo liferencial y en ella expone Leibniz las reglas de la diferenciación. Los trabajos posteriores contienen aclaraciones sobre cuestiones fundamentales, en las cuales aparece preferentemente el *punto de vista formal*. Esencialmente característico es en este orden de conocimientos el breve trabajo del año 1712 (2), por consiguiente, de los últimos años de su vida; en él habla precisamente de definiciones y proposiciones que sólo son *toleranter vera* o, como si dijéramos, *pasaderas: Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universales que conceptus valent*. Con esto se refería tanto a los números complejos como a lo infinito; así, dice de las cantidades infinitamente pequeñas: *commoditati expressionis seu breviloquio mentalis inservimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur*.

(1) Parcialmente reproducidas, figuran en la colección de clásicos de Ostwald, núm. 162. Pueden verse también en «Mathematische Schriften» de Leibniz, publicados por K. J. Gerhardt.

(2) Observatio...; et de vero sensu Methodi infinitesimales, páginas 167-169.

3.° A partir de Leibniz se extiende rápidamente el nuevo Cálculo por el continente, y en él se encuentran cada una de sus tres concepciones. Debemos citar, en primer lugar, el primer *Tratado de Cálculo diferencial* que apareció, el *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes* (1) del *Marqués de l'Hôpital,* discípulo que fué de *Juan Bernoulli,* el cual se había asimilado con una rapidez sorprendente las ideas de Leibniz y publicó el primer *Tratado de Cálculo integral* (2). En ambas obras figura la idea intuitiva de la matemática de aproximación; en particular, considera una curva como un polígono de lados muy pequeños y la tangente como prolongación de uno de sus lados. En Alemania fué especialmente propagado el Cálculo diferencial de Leibniz por *Christian Wolff,* de Halle: cuyas lecciones pueden verse en los *Elementa matheseos universal* (3). Introduce las diferenciales de Leibniz desde el principio del Cálculo diferencial, pero declarando expresamente que no tienen *equivalente real alguno,* y utilizando para hacer sensible la idea de infinitamente pequeños consideraciones de matemática de aproximación; así, presenta como ejemplo, que la altura de una montaña no cambia sensiblemente para su evaluación práctica, cuando se le agrega o se le quita una partícula de polvo.

4.° Repetidas veces se encuentra también el *punto de vista metafísico,* que atribuye a las diferenciales una existencia real. Este modo de interpretar el cálculo por los filósofos se halla también entre los físicos matemáticos. Entre ellos citemos como uno de los más eminentes a *Poisson,* quien en el prólogo de su famoso *Traité de mécanique* (4), en un lenguaje muy vivo, dice que las cantidades infinitamente pequeñas no son simplemente un medio para la investigación, sino que real y efectivamente existen.

5.° Probablemente ha pasado esta concepción a los libros de

(1) París, 1696; 2.ª ed. 1715.
(2) Publicado en alemán por *Kowalewski,* en la colección de clásicos de Ostwald, núm. 194. P. *Schafheilin* ha descubierto poco ha también un Cálculo diferencial de J. Bernoulli, del que se ha ocupado en los Verhandlungen der Naturforschersgesellschaft de Basilea, tomo 32, 1921.
(3) Publicadas, primero, en 1710 y reproducidas en 1712 en Editio nova Hallae, Magdeburgiae, 1742, pág. 545.
(4) Partie I, 2.ª edición, pág. 14. París, 1885.

enseñanza por la tradición filosófica y aun hoy tiene gran importancia en ellos. Como ejemplo mencionamos con gusto la obra, publicada por primera vez en el año 1855, de *Lübsen, Einleitung in der Infinitesimalrechnung* (1), la cual ha ejercido por mucho tiempo una extraordinaria influencia sobre capas muy extensas del público; en mi tiempo, era este libro muy corriente entre los escolares y a su lectura deben muchos la inclinación que les ha llevado a dedicarse a estudios matemáticos. Lübsen definía la derivada utilizando el concepto de límite; pero al lado de esto, a partir de la segunda edición, dice lo que entiende por *verdadero Cálculo infinitesimal: un «misterioso» operar con las cantidades infinitamente pequeñas.* Los capítulos correspondientes están marcados con un asterisco, para indicar que no contienen ningún resultado nuevo. Las diferenciales se introducen como últimos elementos que se originan de una magnitud finita por subdivisiones repetidas un número indefinido de veces, y cada una de estas partes «aunque diferente del cero absoluto, no puede, sin embargo, apreciarse, sino que es una magnitud infinitesimal, un soplo, un instante»; y después sigue una cita inglesa: *Lo infinitesimal es el espíritu de una magnitud que se desvanece* (págs. 59 y 60). Y, más adelante (pág. 76) dice: «El método infinitesimal es, como se ve, algo sutil, pero exacto. Si lo antes dicho y lo que sigue no es bastante a esclarecerlo, débese solamente a nuestra deficiente exposición.» Es, ciertamente, de gran interés el conocimiento de estas definiciones y razonamientos.

Formando pareja con este libro, puede citarse la sexta edición de la muy conocida obra de *Wüllner*, titulada *Lehrbuch der Experimentalphysik* (2), cuyo primer tomo comienza con una breve exposición del Cálculo infinitesimal, con el fin de suministrar a los naturalistas y a los médicos los conocimientos imprescindibles para la Física, que no han podido adquirir en la enseñanza secundaria. Empieza Wüllner (pág. 31) con la definición de cantidad infinitamente pequeña, dx, siguiendo luego la definición, naturalmente más difícil, de la diferencial de segundo orden, d^2x. Leyendo esta introducción con un espíritu matemático se advierte el gran contrasentido de eludir en la segunda

(1) Octava edición, Leipzig, 1899.
(2) 6.ª edición. Leipzig, 1907.

enseñanza el Cálculo infinitesimal por extremadamente difícil y pretender que se conozca completamente en el primer semestre universitario dedicándole sólo diez páginas, en una exposición que, a más de deficiente, es de comprensión extraordinariamente difícil.

La razón de que se hayan podido mantener tales consideraciones durante tanto tiempo al lado del método matemático, exacto, del paso al límite, hay que buscarla en la necesidad que siente el espíritu humano de ir más allá de la formulación abstracta y lógica de dicho método, para penetrar más profundamente en la *naturaleza íntima de las cantidades continuas* y llegar a representaciones más precisas de las mismas que las que se obtiene por la simple impresión psicológica que pueda deducirse del concepto del límite. Muy gráficamente aclara este pensamiento una frase, que creemos del filósofo *Hegel*, repetida en libros y conferencias, que dice: *la función* $y=f(x)$ *representa el ser de las cosas y la derivada* $\frac{dy}{dx}$ *su devenir.* Seguramente hay algo de exacto en esto; pero debe agregarse claramente que con tales palabras nada se ha conseguido en orden a posteriores desarrollos de la Matemática, ya que ésta tiene que basarse sobre ideas y conceptos precisos.

En la novísima Matemática vuelven a aparecer los *infinitamente pequeños actuales* de un modo completamente diferente, en las *investigaciones geométricas de Veronese* y después, también, en los *Grundlagen der Geometrie*, de *Hilbert* (1). La idea básica de estas investigaciones puede resumirse así: Se considera una Geometría en la cual con $x=a$, siendo a un número real cualquiera, vienen determinados no sólo *un* punto del eje x, sino infinitos, cuyas abscisas se diferencian en múltiplos finitos de cantidades infinitamente pequeñas de diferentes órdenes η, ζ, ...; *un punto está, por consiguiente, determinado cuando se da:*

$$x=a+b\,\eta+c\,\zeta+\ldots,$$

siendo a, b, c, ... *números reales ordinarios, y* η, ζ, ... *infinitamente pequeños actuales de órdenes decrecientes.* Hilbert ha

(1) 5.ª edición. Leipzig, 1922.

hecho tan hábil uso de este concepto que mediante oportunos convenios axiomáticos, resulta *evidente que se puede operar sin contradicción* con las magnitudes así construídas. Lo principal para esto es fijar los conceptos de mayor y menor, lo cual se hace así: Considerando un segundo número $x_1 = a_1 + b_1 \eta + c_1 \zeta + \ldots$, se establece en primer lugar que *es* $x \lesseqgtr x_1$ *según que sea* $a \lesseqgtr a_1$ *y si* $a = a_1$ *es* $x \lesseqgtr x_1$ *según que sea* $b \lesseqgtr b_1$; *si también es* $b = b_1$, *se acude a la comparación de* c *con* c_1, *y así sucesivamente.* Se comprende claramente que no es posible hallar ninguna clase de representación concreta a esta clase de entes.

De lo dicho se desprende que con las magnitudes así definidas se podrá operar según esta y otras reglas que pueden agregarse, del mismo modo que con los números finitos; solamente pierde su validez una proposición cierta para el sistema de los números reales ordinarios, a saber: *que si tenemos dos números positivos* e, a, *siempre se puede hallar un número entero,* n, *tal que sea* $n \,.\, e > a$ *por muy pequeño que sea* e *y muy grande que sea* a. En efecto; de las definiciones antedichas se deduce inmediatamente que *cualquier múltiplo finito* $n \,.\, \eta$ *es siempre más pequeño que cualquier número finito y positivo* a, y esta propiedad es precisamente la que caracteriza η como «cantidad infinitamente pequeña». También es siempre $n \,.\, \zeta < \eta$, es decir, ζ *es una cantidad infinitamente pequeña de orden superior al de* η. Un sistema de números de estas condiciones se llama *no arquimediano,* por designarse aquel principio sobre los números finitos con el nombre de *Axioma de Arquímedes,* porque Arquímedes lo admitió como propiedad fundamental indemostrable de los números finitos; la no validez de este axioma es *característica de las cantidades infinitamente pequeñas actuales.* Por lo demás, el nombre de Axioma de Arquímedes, como la mayor parte de las denominaciones personales, es históricamente inexacto; más de medio siglo antes que Arquímedes, había hecho de él uso notable *Euclides,* que tampoco fué su invetor, sino que como muchas otras propiedades que figuran en las obras de éste, fué debido a *Eudoxio* de *Knidos.*

El estudio de las magnitudes no arquimedianas, utilizadas como coordenadas para la constitución de una «*Geometría no arquimediana*», persigue el conocimiento profundo de la continuidad y pertenece al gran grupo de investigaciones sobre la dependencia lógica de los diferentes axiomas de la Geometría ordinaria y la Aritmética; para estudiar esta dependencia se crean siempre sistemas artificiales de números como los no arquimedianos, para los que sólo son válidos una parte de los axiomas, y entonces se deduce la independencia lógica de estos axiomas respecto de los restantes.

De un modo natural se presenta ahora la cuestión de averiguar *si, apoyándose en tales sistemas de números, se podrá dar a los fudamentos tradicionales del Cálculo infinitesimal una forma absolutamente exacta que satisfaga a todas las pretensiones modernas;* es decir, en cierto modo, *si se podrá construir también un Análisis no arquimediano*. La primera y más importante cuestión de este Análisis será demostrar el teorema del valor medio:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

partiendo de los axiomas supuestos. No se puede disputar como imposible todo progreso en esta dirección, pero hasta ahora nada positivo ha sido aportado por ninguno de los muchos investigadores que se han ocupado con los infinitamente pequeños actuales.

Agreguemos para mejor orientación del lector que, desde *Cauchy*, la denominación «*infinitamente pequeño*» se ha venido usando en todos los tratados modernos en otro sentido. No se quiere decir con ello nunca que una cantidad *es* infinitamente pequeña, sino que *llega a ser* infinitamente pequeña; lo que se hace introduciendo esta denominación es utilizar un modo cómodo de expresar que la cantidad tiende indefinidamente a cero.

No podemos menos de recordar todavía la reacción provocada por este modo de construir el Cálculo infinitesimal sobre las cantidades infinitamente pequeñas. Se echó de ver en seguida lo misterioso, lo indemostrable en todas estas representaciones, y de ahí que se originase con frecuencia el prejuicio de considerar al Cálculo diferencial como un *sistema filosófico especial* que no es dable demostrar sino sólo creer, o dicho vulgarmente, como una «chifladura». Uno de los críticos más agudos en este sentido es el filósofo y obispo *Berkeley*, que en un pequeño libro «The analyst» (1) atacó en forma muy amena las oscuridades que dominaban en la Matemática de su tiempo. Parte en su exposición de que frente a los principios y métodos de la Matemática debe existir la misma libertad de crítica «que los matemáticos aplican a los misterios de la Religión» y combate sañudamente todos los conceptos del nuevo Análisis, el Cálculo de fluxiones, como las operaciones con diferenciales, viniendo a la conclusión de que todo el edificio del Análisis resulta obscuro y absolutamente incomprensible.

Parecidas opiniones se han mantenido hasta el presente entre muchos filósofos; éstos conocen solamente las ideas antiguas sobre diferenciales y no se han dado cuenta de la actual sistematización lógica y completamente rigurosa del Cálculo infinitesimal, basada en el concepto de límite. Como ejemplo, permítasenos citar sólo un pasaje de la obra de *Baumann*, «*Raum, Zeit und Mathematik*» (2): «combatimos, dice, la justificación lógica y metafísica que Leibniz ha dado al Cálculo, pero no atacamos en nada a este Cálculo. Lo consideramos como un genial descubrimiento que se ha comprobado prácticamente; como un arte, más que como una ciencia. No es posible darle una forma puramente lógica; no puede ser deducido de los elementos de la matemática ordinaria...»

Esta reacción contra las diferenciales explica el intento, repetidamente citado, de *Lagrange*, en su «*Théorie des fonctions analytiques*» del año 1797, que ahora se nos presenta bajo una nueva luz. Lagrange elude en esta obra no sólo las cantidades infinitamente pequeñas, sino toda operación de paso al límite, limitándose a funciones definidas por series potenciales:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

y para éstas viene definida su «*función derivada*, $f'(x)$», por otra serie potencial:

$$f'(x) = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + \dots$$

de un modo puramente formal; es característico que sistemáticamente evita las palabras «cociente diferencial» y la notación $\dfrac{dy}{dx}$. Consecuentemente, tampoco habla del Cálculo diferencial, sino de un «*Cálculo de derivación*».

(1) Londón, 1734.
(2) T. II (Berlín, 1869), pág. 55.

No pudo satisfacer por mucho tiempo, en verdad, esta exposición, pues, por una parte, el concepto de función aquí usado, resulta, como hemos tenido ocasión de decir anteriormente, demasiado restringido; pero, sobre todo, tales definiciones, absolutamente formales, imposibilitan penetrar en el fondo de los conceptos de derivada e integral y no aportan contribución alguna a lo que puede llamarse *motivo psicológico*; así queda completamente inexplicado por qué se usan estas series deducidas tan particularmente. Por último, si las consideraciones de la teoría de límites no se puede establecer la convergencia de *estas series ni ver entre qué límites de error pueden ser sustituídas por sumas parciales finitas*; así como tampoco se puede relacionarlas entre sí, lo cual es absolutamente necesario cuando se quiere hacer uso práctico de las mismas; pues hay que recurrir de nuevo a dicha teoría, para cuya exclusión fué realmente ideado todo el sistema establecido.

Acaso no esté de más en este lugar decir algo acerca de las distintas opiniones sobre los fundamentos del Cálculo infinitesimay, que aún hoy se manifiestan y salen fuera del reducido círculo de los matemáticos profesionales. Yo creo que caben aquí consideraciones análogas a las que hicimos al tratar de los fundamentos de la Aritmética (pág. 19 y sig.). En toda disciplina matemática se puede separar totalmente el problema de la dependencia lógica interna de su construcción, del de la aplicación a objetos de nuestra percepción, interna o externa, de los conceptos y propiedades establecidos «axiomáticamente» y, por decirlo así, «arbitrariamente». En uno de sus trabajos (1) *G. Cantor*, hablando de los números enteros, distingue la *realidad inmanente*, que se presenta con ocasión de su definición lógica, de la *realidad transiente*, que tienen por su aplicación a objetos reales. En el Cálculo infinitesimal, el primer problema queda totalmente resuelto por las teorías basadas en el concepto de límite, tal como la ciencia matemática lo tiene establecido actualmente de manera completamente lógica; la segunda cuestión entra de lleno en el campo de la Teoría del conocimiento, no pudiendo prestar el matemático otra cooperación que la de contribuir a su formulación precisa, separando y resolviendo la primera parte (la na-

(1) Mathematische Annalen, tomo 21, 1883, pág. 562.

turaleza misma de la cuestión hace que los trabajos puramente matemáticos no aporten contribución inmediata alguna a la solución); véanse las consideraciones análogas hechas al hablar de la Aritmética en la página 19 y sig. Todas las dificultades de los fundamentos del Cálculo infinitesimal estriban precisamente en que estas dos partes separadas del problema no pueden diferenciarse de un modo indudable; en realidad, la primera parte, matemática pura, está construída lo mismo que otras disciplinas de la Matemática y las dificultades radican tanto en ella como en la segunda parte, filosófica. El valor de las investigaciones que se hacen en esta segunda dirección va manifestándose en razonamientos de la naturaleza indicada, y parece demostrar que es preciso apoyarse en los resultados de los trabajos de índole puramente matemática sobre el primer problema.

Aquí damos fin a este breve esbozo histórico del desarrollo del Cálculo infinitesimal, en el cual hemos tenido que limitarnos, naturalmente, a señalar las ideas directrices más importantes. Ciertamente sería muy útil profundizar en la cuestión haciendo un estudio directo de toda la literatura de aquel período. Muchas interesantes indicaciones y notas puede hallar el lector en la conferencia de *Max Simon* dada en un Congreso de la Asociación para el Progreso de las Ciencias en Frankfott, en 1896, titulada *Zur Geschichte und Philosophie der Diferentialrechnung*.

Si ahora, para terminar, nos fijamos en la posición de la enseñanza escolar respecto del Cálculo infinitesimal vemos cómo, en cierto modo, han venido reflejándose en ella todas las vicisitudes de la evolución histórica del Cálculo infinitesimal. En los establecimientos de enseñanza secundaria en que antes se explicaba esta disciplina, *no se hacía* (así, al menos, lo hacen creer los libros que se usaban, y, ciertamente, no podía ser de otro modo) *una exposición precisa de la construcción científica exacta del Cálculo infinitesimal por medio del método de los límites*, sino que, cuando más, aparecía este método desvanecido en mayor o menor grado, mientras que se ponía en primer término las operaciones con cantidades infinitesimales y algunas veces también el cálculo de derivadas en el sentido de Lagrange. Naturalmente, se privaba así a la enseñanza no sólo de rigor, sino tambien de claridad; y se comprende bien que, como ocurrió, poco a poco se originase una oposición muy fuerte contra la introducción del Cálculo infinitesimal en la enseñanza secundaria; oposición que fué extendiéndose hasta culminar en los decenios del 70 al 80 del siglo pasado en una prohibición oficial de la enseñanza del Cálculo, aún en las Escuelas realistas.

Es indudable, sin embargo, que esto no ha impedido, como de un modo incidental lo habíamos hecho notar ya anteriormente, que el *método de los límites llegase* a ser utilizado en la enseñanza media, siempre que era necesario; lo único que se hizo es no nombrarlo y aún, a veces, creer que se trabajaba con otra cosa. Se verá claramente esto con sólo *tres ejemplos*, de los cuales seguramente se acordará el lector de su época de estudiante.

a) La conocida *determinación de la longitud de la circunferencia y del área del círculo* por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos, no es, evidentemente, más que una *integración*. Esta manera de calcular, viene aplicándose desde la antigüedad; lo fué ya por *Arquímedes* y a este antiguo clásico debemos que se haya mantenido en la enseñanza secundaria este problema.

b) La enseñanza de la Física, especialmente de la Mecánica, necesita imprescindiblemente los conceptos de *velocidad* y *aceleración*, que utiliza ya para las *leyes de la caída de los graves*. Pero la deducción de estas leyes no es realmente más que la integración de la ecuación diferencial $z''=g$ por la función $z = \frac{1}{2} gt^2 + at + b$, donde a, b son las constantes de integración. Las necesidades de la Física *obligan* a estudiar este problema en este período de enseñanza, y los métodos que entonces se empléan son, más o menos disfrazados, naturalmente, métodos exactos de integración.

c) En muchos establecimientos de enseñanza del norte de Alemania se expone la *teoría de máximos y mínimos* siguiendo un procedimiento, al que dan el nombre del notable pedagogo matemático *Schellbach*. El procedimiento consiste en resolver la ecuación:

$$\lim_{x = x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = 0$$

para obtener los valores que hacen máxima o mínima la función $y=f(x)$, lo cual es, en definitiva, el mismo método del Cálculo diferencial, sin otra variación que no usar la palabra «derivada». Seguramente Schellbach utilizó este artificio de notación sólo cuando, como consecuencia de la prohibición de la enseñanza del Cálculo, se vió obligado a no hablar de derivadas, y no quiso dejar de tratar estas cuestiones; pero sus discípulos tomaron el procedimiento, sin modificarlo en nada, y le dieron el nombre del maestro, resultando así, que a los alumnos se les enseñan cosas ya conocidas de Fermat, Leibniz y Newton bajo el nombre de Schellbach.

Para terminar, permítaseme agregar cómo van ganando terreno nuestras *tendencias de reforma* en estas cuestiones, no ya sólo en Alemania, sino también en otros países, particularmente en Francia, lo que hace esperar que en decenios próximos lleguen a prevalecer en la enseñanza de la Matemática. *Nuestro deseo es que los conceptos representados por los símbolos* $y=f(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$, llleguen a ser familiares a los alumnos *con estas denominaciones, y no como una nueva disciplina abstracta, sino enlazados orgánicamente dentro de la enseñanza total, a lo cual puede llegarse ascendiendo poco a poco, partiendo de los ejemplos más simples*. Así podría empezarse, p. ej., en la Obertertia y Untersekunda (1) estudiando circunstanciadamente las funciones $y=ax+b$ (para valores determinados de a, b) e $y=x^2$, representándolas sobre *papel milimétrico*, y haciendo, a la vista de las curvas correspondientes, que vayan surgiendo los conceptos de pendiente y área, pero manteniéndose siempre en ejemplos concretos. En los grados superiores se puede ya entonces sistematizar los conocimientos así adquiridos, con lo cual se consigue que los alumnos *posean completamente los principios del Cálculo infinitesimal*. Lo esencial es hacer ver al discípulo que en todo esto no hay nada misterioso, sino cosas sencillas, que cualquiera puede comprender.

La necesidad inaplazable de tales reformas se funda en que afecta a la *formación de conceptos matemáticos que hoy se utilizan constantemente en las aplicaciones de la Matemática a todas las ramas de la Ciencia* y sin las cuales todos los estudios en la

(1) N. del T. Enseñanzas equivalentes a los últimos cursos de nuestro Bachillerato.

enseñanza superior, y aun los más sencillos de Física experimental, quedarían completamente en el aire. El lector que desee un estudio más detenido sobre este asunto puede leer la obra de Klein-Schimmack (citada en la pág. 3).

Para completar estas consideraciones generales mediante algo concreto vamos a tratar más en particular uno de los puntos más importantes del Cálculo infinitesimal, la serie de Taylor.

2. El Teorema de Taylor

Análogamente a lo hecho antes al tratar de las series trigonométricas, nos apartaremos en nuestra exposición de la usual en los libros de texto, dando más relieve a lo que para la práctica tiene importancia, cual son las *series finitas* y una *concepción intuitiva de la materia por medio de representaciones gráficas.* Así toma todo un aspecto completamente elemental y fácilmente asimilable.

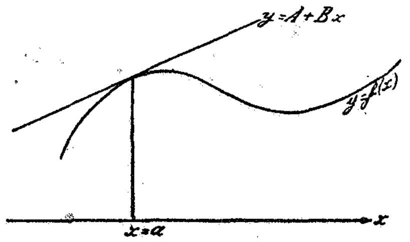

Figura 97

La cuestión de que partimos es ésta: *¿Podrá obtenerse con aproximación suficiente una línea,* y=f(x), *valiéndose de curvas lo más sencillas posible?* Lo primero que se ocurre es sustituir la curva en el entorno de un punto $x=a$ por la *recta tangente* en este punto:

$$y=Ax+B,$$

como se hace en Física y en toda clase de aplicaciones cuando en un desarrollo en serie se «desprecian» los términos que contienen potencias superiores de la variable independiente (fig. 97). Pero siguiendo este mismo procedimiento, se pueden lograr *mejores aproximaciones* empleando *parábolas de* 2.°, 3.°, ... *orden*:

$$y=A+Bx+Cx^2, \qquad y=A+Bx+Cx^2+Dx^3, \ \ldots,$$

o, hablando analíticamente, *polinomios de grados superiores*, los cuales son sumamente convenientes, puesto que el cálculo de sus valores resulta muy cómodo. Supondremos estas curvas de tal modo situadas *que en el punto*, x=a *se adapten lo más íntimamente posible a la curva dada*, es decir, *que sean parábolas osculatrices*. La parábola cuadrática, por ejemplo, no sólo tiene común con la curva la ordenada, sino también la primera y la segunda derivada; la parábola cúbica tiene, además, la misma tercera derivada, etc. Un cálculo sencillo da entonces como expresión analítica de la *n-sima parábola osculatriz:*

$$y=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n,\ (n=1,2;3,\ldots),$$

y el segundo miembro de esta ecuación está formado precisamente por los $n+1$ *primeros términos del desarrollo de Taylor.*

Para estudiar *el grado de aproximación obtenido por medio de las curvas representadas por estos polinomios*, comenzaremos, como ya hicimos en las series trigonométricas, por una *consideración más experimental*, la de las figuras 98 y siguientes, que

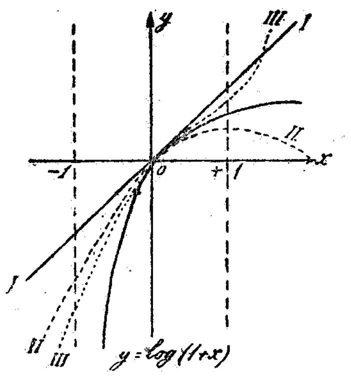

Figura 98

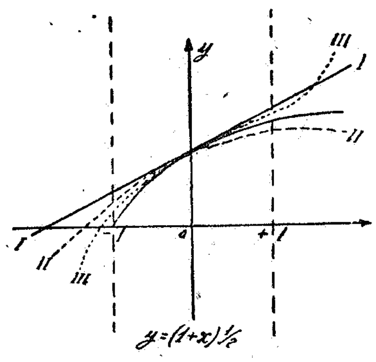

Figura 99

representan *las primeras parábolas osculatrices* de curvas sencillas, dibujadas por *Schimmack* (1). Las cuatro primeras figuras corresponden a las cuatro funciones siguientes, todas las cuales

(1) Cuatro de estas figuras están tomadas del trabajo de Schimmack «Ueber die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen», Leipzig, 1908.

tienen singular el punto $x=-1$, con sus parábolas osculatrices en el punto 0:

$$1.^a \quad \log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + - \dots$$

$$2.^a \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - + \dots$$

$$3.^a \quad (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - 4x^3 + - \dots$$

$$4.^a \quad (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots$$

Las parábolas osculatrices sucesivas se aproximan en el intervalo $(-1, +1)$ a la curva original cada vez más al crecer su orden; pero se encorvan de un modo notable a la derecha de

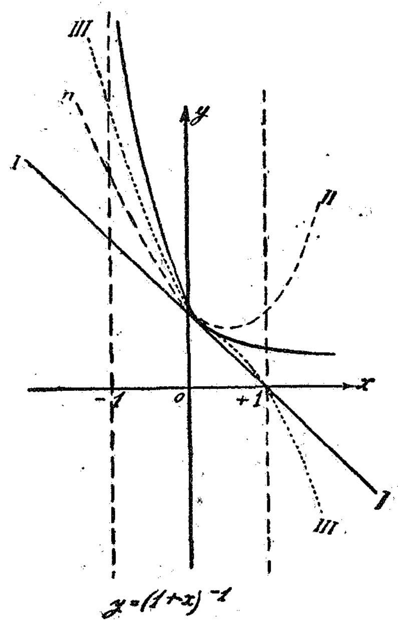

Figura 100

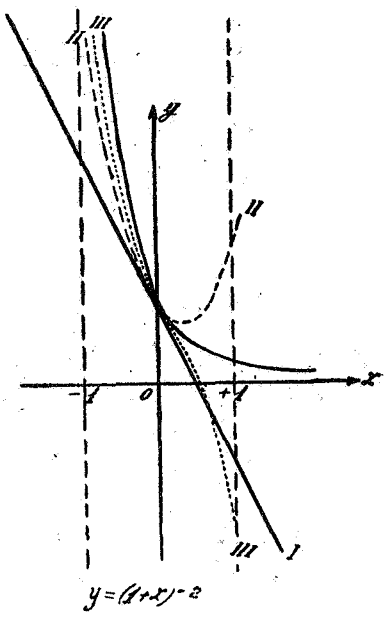

Figura 101

$x=+1$, hacia arriba y hacia abajo, alternativamente. *En el punto singular*, $x=-1$, en el que las ordenadas de las curvas originales correspondientes a los casos 1.°, 2.° y 3.° son infinitamente grandes, las ordenadas de las parábolas osculatrices sucesivas toman *valores cada vez mayores;* en el segundo caso, en el cual la rama representada de la función original tiene un punto de parada con tangente vertical en $x = -1$, las parábolas osculatrices se extienden más allá de este punto, pero puede decirse que siguiendo aproximándose a la curva original, ya que las ramas de dichas curvas tienen cada vez mayores pendientes. En el punto $x = +1$, simétrico del $x = -1$ respecto del eje y, las parábolas osculatrices se aproximan cada vez más a las curvas origi-

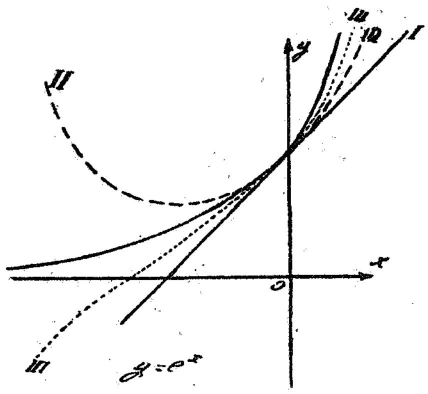

Figura 102

nales en los dos primeros casos; en el tercero, sus ordenadas van siendo alternativamente iguales a 1 y 0, en tanto que la de la curva original adquiere el valor $\frac{1}{2}$; y, por último, en el cuarto caso, a medida que crece el orden de la parábola osculatriz, su ordenada crece también, indefinidamente, tomando alternativamente valores positivos y negativos.

Las figuras 102 y 103 contienen representaciones de las parábolas osculatrices de dos *funciones transcendentes enteras:*

$$5.^{a} \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{7!} + \cdots,$$

$$6.^{a} \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots,$$

pudiéndose observar en ellas que, al crecer el orden de las parábolas osculatrices, va aumentando la porción de curva original que prácticamente puede representarse con suficiente aproximación por aquellas parábolas. Sobre todo se nota esto en el caso de sen x, en el cual parece como si las parábolas se esforzasen en seguir cada vez más las oscilaciones de la sinusoide.

El trazado de curvas como éstas, en los casos sencillos, puede ser muy conveniente en la enseñanza secundaria

Después de haber reunido este material de experiencia, pasemos ya a la *consideración matemática*. Tenemos, primero, la cuestión, de extraordinaria importancia práctica, acerca de la *exacti-*

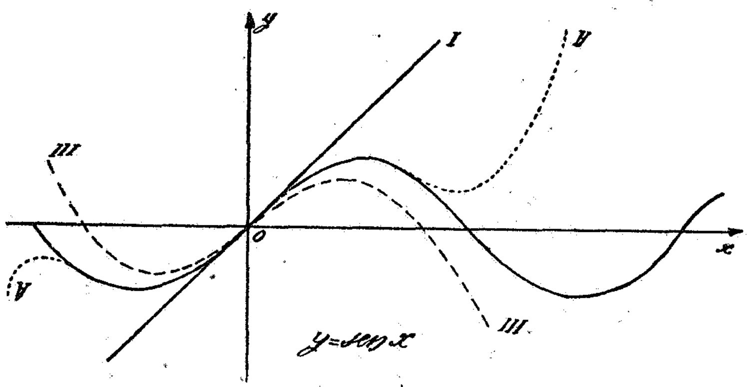

Figura 103

tud con que, en general, la n-sima parábola osculatriz representa la curva original (evaluación del resto en el valor de la ordenada), y unido a este problema, naturalmente, el que deriva con el paso al valor finito de n, a saber: *¿Se puede representar o no exactamente una curva dada, o al menos un arco de ella, por una serie potencial?*

Nos limitaremos a indicar solamente el teorema de uso más corriente sobre el resto:

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)\right]$$

cuya deducción puede hallarla el lector en todos los libros de Análisis; nosotros volveremos más tarde sobre este punto colocándonos entonces en un punto de vista general. El teorema dice que *entre* a *y* x *existe un valor intermedio* ξ, *tal que* R_n *está dado por la fórmula:*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(\xi) \qquad (a < \xi < x).$$

El problema del paso a la serie infinita se reduce entonces inmediatamente a ver si este resto, $R_n(x)$, tiene límite nulo o no al crecer n infinitamente.

En los ejemplos puestos, se ve inmediatamente que las series correspondientes a las funciones 5.ª y 6.ª convergen para cualquier valor de x; en los cuatro primeros ejemplos, las series convergen hacia la función original *dentro del intervalo* $(-1, +1)$, pero son *divergentes fuera del mismo*. Para $x = -1$, en el caso 2.° hay convergencia hacia el valor de la función; en

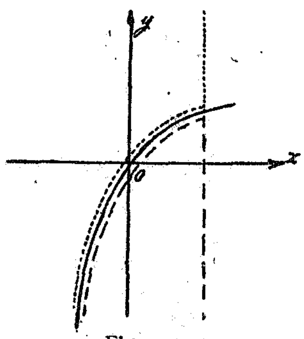

Figura 104

los ejemplos 1.°, 3.° y 4.° el valor de la serie se hace infinito lo mismo que el de la función, de modo que, en realidad, también se podría decir que convergen; pero no se acostumbre emplear esta palabra aplicándola a series que tienen un valor infinito. Por último, para $x = +1$ hay convergencia en los dos primeros casos y divergencia en los dos últimos. Todo esto se halla en la más bella armonía, con lo que aparece en nuestras figuras. Podemos ahora, también, como ya hicimos para las series trigonométricas, *investigar los valores límites a los cuales tienden las parábolas de aproximación tomadas como sucesión de curvas*, las cuales no pueden terminarse súbitamente en los puntos $x = \pm 1$. En la figura 104 se ha representado esta curva límite, correspondiente a $\log(1+x)$ y se ve que las parábolas de orden par y las de orden impar tienen posiciones límites distintas, dibujadas con línea de puntos y de trazos en la figura, las cuales bordean la curva logarítmica entre -1 y $+1$, y en $x=+1$ se prolongan verticalmente, por arriba y por abajo, respectivamente. Cosa parecida ocurre en los otros tres casos.

La consideración teórica de la serie de Taylor se completa totalmente con el *paso al campo complejo,* pues sólo entonces se puede comprender la repentina *desaparición de la convergencia* de la serie potencial en puntos completamente regulares de la función. En nuestros cuatro ejemplos, realmente puede explicarse el fenómeno en el punto $x=+1$ diciendo que una serie no puede converger a la derecha más que a la izquierda, y por la izquierda tiene que desaparecer la convergencia en el punto $x=+1$, por la singularidad de éste. Pero tal explicación no puede ya aplicarse en el siguiente caso: Sea la función $y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$; su desarrollo en serie de Taylor, correspondiente a una rama de la función, regular para todos los valores reales de x, es:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots,$$

que sólo converge en el intervalo $(-1, +1)$, y las parábolas osculatrices convergen alternativamente hacia dos posiciones límites (fig. 105). La primera se compone de las porciones representadas en la figura por los trozos de línea de trazos gruesos de las verticales $x=+1$, $x=-1$ y la parte de línea confundida con la de $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ comprendida entre aquellos puntos. La segunda posición límite es la representada por línea de puntos, de formación análoga a la de la primera. Las parábolas osculatrices resultantes de tomar un número impar de términos del desarrollo en serie tienden a la primera línea límite, y las correspondientes a un número par de términos tienden a la segunda. La línea de trazos finos de la figura es la $y=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$ y la de puntos finos la $y=x-\dfrac{x^3}{3}$. La súbita desaparición de la convergencia en los puntos, absolutamente regulares, $x=+1$, resulta completamente incomprensible limitándonos al campo real. La explicación sólo puede hallarse en el importantísimo teorema del *círculo de convergencia,* la más hermosa de las contribuciones de *Cauchy* a la teoría de las funciones de variable compleja, que puede ser enunciado así: *Señalados en el plano complejo todos los puntos singulares de una función analítica* y=f(x), *si se trata de una función uniforme, y en la superficie de Riemann relativa a* f(x) *en el caso contrario, la serie de Taylor*

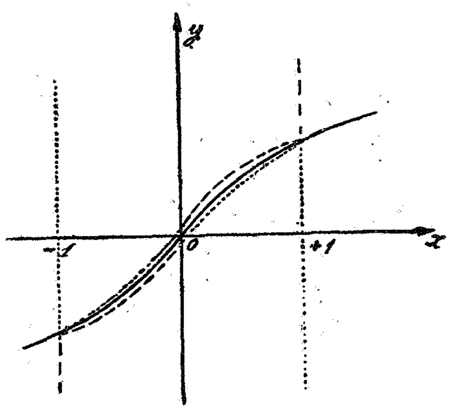

Figura 105

relativa a un punto regular, x=a *converge en el interior de la mayor circunferencia de centro* a *trazada en la hoja correspondiente de la superficie de Riemann, que no contenga en su interior ningún punto singular* (tal, pues, que pertenecerá a la circunferencia uno, al menos, de los puntos singulares) *y la serie no converge en ningún otro punto exterior a dicho círculo* (fig. 106).

En el ejemplo citado del arc tg x, es sabido que hay dos puntos singulares, $x=\pm 1$, y el círculo de convergencia del desarrollo en serie es, por consiguiente, el círculo de radio unidad y centro $x=0$; la convergencia desaparece, por lo tanto, a partir de $x=\pm 1$, puesto que fuera del segmento comprendido entre estos puntos el eje real no contiene ningún punto del círculo de convergencia (fig. 107).

Por último, en lo que concierne a la convergencia de la serie sobre la misma circunferencia unidad, hemos de limitarnos en esta ocasión a una indicación que viene a enlazarse con la ya mencionada *conexión entre las series potenciales y trigonométricas;* tal convergencia depende de que la parte real y la imaginaria de la función puedan o no ser desarrolladas en series trigonométricas convergentes sobre dicha circunferencia con las singularidades que necesariamente debe contener.

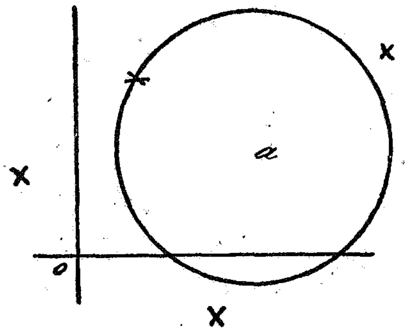

Figura 106

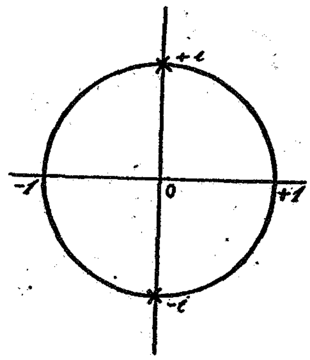

Figura 107

Para hacer ver lo fértil del teorema de Taylor vamos a decir algo acerca de sus *relaciones con los problemas de la interpolación y del Cálculo de diferencias.* También en la teoría de la interpolación se estudia el problema de *sustituir aproximadamente una curva dada por una parábola;* pero en lugar de lograr esta aproximación en *un* punto, como anteriormente, *tiene la parábola*

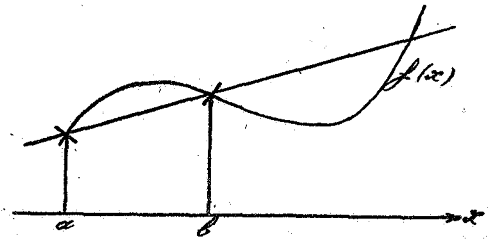

Figura 108

que cortar a la curva en un número de puntos dados de antemano; y la cuestión que se presenta entonces es ver hasta qué punto esta *parábola de interpolación* da aproximación suficiente. En el caso más sencillo supone esto, pues, haber sustituído la curva no ya por la tangente, sino por una *secante* (fig. 108); análogamente se puede continuar con la parábola cuadrática que pasa por tres puntos dados de la curva, la cúbica que pasa por cuatro, y así sucesivamente.

Este modo de resolver el problema de la interpolación es absolutamente natural y de él se hace constante aplicación, por ejemplo, en el uso de las tablas logarítmicas numéricas; pues lo que allí se hace equivale a suponer que la curva logarítmica es recta entre cada dos valores sucesivos dados por las tablas, y se interpola «linealmente» con gran facilidad, utilizando las «tablitas de diferencias» que figuran en aquéllas; cuando esto no da bastante aproximación, se aplica la interpolación cuadrática.

La determinación de las parábolas osculatrices en el teorema de Taylor es solamente un caso particular de este problema general; es el caso en que aquellas intersecciones de las parábolas de

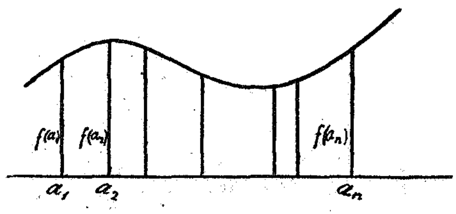

Figura 109

interpolación se confunden en un solo punto. Claro es que al sustituir la curva por estas parábolas osculatrices, no se puede ya hablar de «interpolación» en sentido estricto, pero también se considera siempre la *extrapolación* incluída en el problema de la *interpolación;* así, por ejemplo: la secante, no sólo se compara con la curva en la porción comprendida *entre* sus puntos de intersección, sino también *fuera*. Por esta razón parece más apropiado denominar todo el procedimiento con la palabra más comprensiva de *aproximación*.

Vamos ahora a indicar las fórmulas más importantes de interpolación. Determinaremos primeramente la parábola de orden $n-1$ que corta a la curva representativa de la función en n puntos a_1, a_2, a_3, ..., dados arbitrariamente, es decir, tal que sus ordenadas en estos puntos son, respectivamente, iguales a $f(a_1)$, $f(a_2)$, $f(a_3)$, ... Este problema está resuelto, según es sabido, por la *fórmula de interpolación de Lagrange:*

$$y=\frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}f(a_1)+\frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}f(a_2)+\dots, \quad [1]$$

que en total contiene *n términos con los factores* $f(a_1)$, $f(a_2)$, ..., $f(a_n)$, y en los numeradores faltan sucesivamente los factores $x-a_1$, $x-a_2$, ..., $x-a_n$. La exactitud de esta fórmula puede comprobarse inmediatamente; se observa de una parte, que cada término de y, y, por lo tanto, y mismo, es un polinomio de grado $n-1$ en x; y, después que para $x=a_1$ se anulan todas las fracciones desde la segunda en adelante, quedando reducida la primera a la unidad y siendo, en consecuencia, $y=f(a_1)$; análogamente, poniendo $x=a_2$ se reconoce que es $y=f(a_2)$; etc.

De esta fórmula se deduce, como caso particular, la designada ordinariamente como *fórmula de Newton*, y es la que corresponde al caso de ser *equidistantes de las abscisas dadas* (fig. 110). Re-

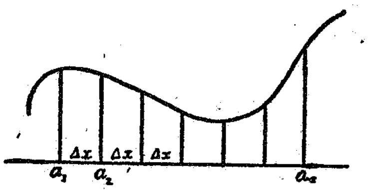

Figura 110

sulta, entonces, más ventajoso utilizar la *notación del Cálculo de diferencias,* como vamos a hacer ahora.

Sea Δx un incremento cualquiera dado a x, y representemos por $\Delta f(x)$ el incremento correspondiente que experimenta $f(x)$, de modo que:

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x).$$

El incremento $\Delta f(x)$ es, a su vez, una función de x, que, al incrementar x en Δx, experimenta un incremento determinado que llamaremos «incremento segundo» o «diferencia seguda» y se representa por $\Delta^2 f(x)$:

$$\Delta f(x+\Delta x)=\Delta f(x)+\Delta^2 f(x),$$

y así siguiendo, podemos escribir:

$$\Delta^2 f(x+\Delta x)=\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x), \text{ etc.}$$

Estas notaciones son exactamente las mismas del Cálculo diferencial, solamente que aquí se trata de cantidades finitas determinadas y no se hace intervenir el paso al límite.

De estas definiciones sobre las diferencias, se sigue inmediatamente que *los valores de la función* f *en puntos sucesivamente equidistantes* son :

$$\left.\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= f(x)+\Delta f(x)\\
f(x+2\Delta x) &= f(x+\Delta x)+\Delta f(x+\Delta x)\\
&= f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)\\
f(x+3\Delta x) &= f(x+2\Delta x)+\Delta f(x+2\Delta x)\\
&= f(x)+3\Delta f(x)+3\Delta^2 f(x)+\Delta^3 f(x)\\
f(x+4\Delta x) &= f(x)+4\Delta f(x)+6\Delta^2 f(x)+4\Delta^2 f(x)+\Delta^4 f(x).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\quad [2]$$

De este modo sencillo se expresan los valores de la función en los diferentes puntos equidistantes en función de las diferencias sucesivas relativas al primer punto x, entrando como factores los *coeficientes binómicos.*

Vemos, pues, que *la fórmula de Newton da para la parábola de interpolación de orden* n — 1, *relativa a los* n *puntos equidistantes situados en el eje de abscisas:*

$$a_1=a, \quad a_2=a+\Delta x, \quad \ldots, \quad a_n=a+(n-1)\,\Delta x,$$

la que, por consiguiente, tiene en ellos las mismas ordenadas que la función $f(x)$, la ecuación :

$$\left.\begin{aligned}
y = f(a) &+ \frac{(x-a)}{1\,!}\,\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2\,!}\,\frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}+\ldots\\
&+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\ldots(x-a-(n-2)\,\Delta x)}{(n-1)\,!}\,\frac{\Delta^{n-1} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad [3]$$

En efecto, el segundo miembro es un polinomio de grado $n-1$ en x ; además se reduce a $f(a)$ para $x=a$, y para $x=a+\Delta x$ se anulan todos los términos desde el tercero en adelante, quedando $y=f(a)+\Delta f(a)$, lo que, según [2], es precisamente $f(a+\Delta x)$, y así sucesivamente. *El cuadro* [2] *prueba que el polinomio toma en todos los* n *puntos precisamente los valores correspondientes de la función* $y=f(x)$.

Cuando se quiere aplicar una de estas fórmulas de interpolación con ventaja real y positiva, es preciso cerciorarse previamente de la exactitud con que representa la función $f(x)$, es decir, hay que conocer una *evaluación del resto*. Esta fué dada por *Cauchy* en 1840 (1), y vamos a ver el modo de deducirla. Sea x un valor cualquiera, comprendido entre los $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (nos fijaremos en la *fórmula general de Lagrange*) o fuera de ellos (inter o extrapolación); designando por $P(x)$ la ordenada de la parábola de interpolación de orden $n-1$, dada por la fórmula de Lagrange, y por $R(x)$ el resto, es:

$$f(x)=P(x)+R(x). \qquad [4]$$

Según la definición de $P(x)$, tiene que anularse $R(x)$ para los valores $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$; luego podemos escribir:

$$R(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!}\,\psi(x),$$

poniendo por razón de comodidad el divisor $n!$; procediendo en forma análoga a la que conduce a la determinación del término complementario de la fórmula de Taylor, se ve que $\psi(x)$ es *igual al valor de la derivada* n*-sima de* $f(x)$ *en un punto* ξ *comprendido entre los* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esta propiedad de que la diferencia entre $f(x)$ y el polimonio de grado $n-1$ dependa del conjunto de todos los valores de la función $f^{(n)}(x)$ no sorprende, sino que parece muy natural, observando que $f(x)$ es igual a aquel polinomio en el caso de ser idénticamente nulo $f^{(n)}(x)$.

En cuanto a la *demostración de esta fórmula del resto*, se logra por el siguiente artificio: Se forma la función de la nueva variable z:

$$F(z)=f(z)-P(z)-\frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{n!}\,\psi(x),$$

donde, por tanto, se considera como parámetro la variable x que interviene en $\psi(x)$. Ahora bien, por definición es:

$$P(a_1)=f(a_1), \quad P(a_2)=f(a_2), \quad \ldots, \quad P(a_n)=f(a_n),$$

(1) Comptes Rendus, XI, págs. 775-789, Oeuvres, Serie I, tomo I, París, 1885, págs. 409-424.

luego será:

$$F(a_1)=F(a_2)=\ldots=F(a_n)=0.$$

Además es también $F(x)=0$ puesto que para $z=x$ el último sumando se transforma en $R(x)$ y el segundo miembro se anula según [4]. Se conoce, pues, $n+1$ ceros de $F(z)$, los $z=a_1$ $a_2, \ldots, a_n$, y aplicando una *forma generalizada del teorema del valor medio* (que se deduce por reiteración del teorema ordinario pág. 318 y puede enunciarse así: *Si una función continua y sus* $n-1$ *primeras derivadas se anulan todas en* $n+1$ *puntos, su derivada* n*-sima se anula en un punto, por lo menos del intervalo que contiene todos aquellos ceros*. Por lo tanto, siempre que $f(x)$ y, por consiguiente, también $F(z)$, tenga n derivadas continuas, existe un punto ξ, entre los extremos de los valores $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ tal que

$$F(\xi)=0\ ;$$

ahora bien, es:

$$F^{(n)}(z)=f^{(n)}(z)-\psi(x),$$

puesto que el polinomio $P(z)$ de grado $n-1$ tiene nula la derivada de orden n y del último sumando sólo el término de mayor grado $\dfrac{1}{n!}z^n\,.\,\psi(x)$ tiene derivada de orden n no nula; luego será, finalmente:

$$F^{(n)}(\xi)=f^{(n)}(\xi)-\psi(x), \qquad \text{o bien:} \qquad \psi(x)=f^{(n)}(\xi),$$

que era precisamente lo que queríamos demostrar.

Según esto, podremos escribir así la *fórmula de interpolación de Newton* con su resto o término complementario:

$$\left.\begin{aligned} f(x)=f(a)&+\frac{x-a}{1!}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}+\frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}+\ldots\\ &+\frac{(x-a)\ldots[x-a-(n-2)\Delta x]}{(n-1)!}\frac{\Delta^{(n-1)}f(a)}{(\Delta x)^{n-1}}+\\ &+\frac{(n-a)\ldots(x-a-(n-1)\Delta x]}{n!}f^{(n)}(\xi),\end{aligned}\right\}\quad [5]$$

siendo ξ *un valor comprendido en el intervalo que contiene los* $n+1$ *puntos* $a,\ a+\Delta x,\ a+2\Delta x,\ \ldots,\ a+(n-1)\Delta x,\ x$. Esta fórmula es realmente indispensable para las aplicaciones. Ya antes nos hemos referido a la *interpolación lineal en el uso de las tablas logarítmicas;* para $f(x)=\log x$ y $n=2$ se deduce de la [5]:

$$\log x = \log a + \frac{x-a}{1!}\cdot\frac{\Delta \log a}{\Delta x} - \frac{(x+a)(x-a-\Delta x)}{n!}\cdot\frac{M}{\xi^2},$$

(pues es $\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$, representando por M el módulo del sistema de logaritmos); y tenemos así una expresión del error cometido en la interpolación lineal entre los dos logaritmos, de a y $a+\Delta x$, tomados de las tablas. El signo de este error es distinto según que x esté comprendido entre a y $a+\Delta a$, o no. Esta fórmula debiera ser conocida por cuantos hacen uso de las tablas logarítmicas.

No podemos entrar aquí en más detalles acerca de las aplicaciones de este Cálculo de diferencias; y nos vamos a concretar a *señalar la gran analogía entre la fórmula de interpolación de Newton y la fórmula de Taylor.* Esta analogía tiene un fundamente real: *Se puede deducir de un modo sencillísimo, pero absolutamente riguroso, de la fórmula de Newton la de Taylor con su término complementario;* del mismo modo que tomando límites se pasa de las parábolas de interpolación a las osculatrices. Y, en efecto, si se hace tender Δx hacia cero, dejando fijos x, a y n, supuesto que $f(x)$ sea derivable n veces, los $n-1$ cocientes de diferencias que figuran en la fórmula [5] se transforman en las derivadas respectivas:

$$\lim_{x=0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = f'(a), \qquad \lim_{x=0} \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} = f''(a),\ \ldots;$$

en el último término del segundo miembro, al ir decreciendo Δx, va tomando ξ diferentes valores; pero como todos los demás términos de este segundo miembro tienen límites determinados y el primer miembro conserva durante todo el proceso del paso al límite el valor $f(x)$, todos estos valores $f^{(n)}(\xi)$ deben tender a un valor determinado, el cual por razón de la continuidad de

$f^n(x)$ es el valor de esta función en un punto situado entre a y x; designándolo por la misma letra ξ será, pues:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1\,!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-\Delta)\,!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(\xi).$$

$$(a < \xi < x)$$

con lo cual *queda demostrado completamente la fórmula de Taylor con su resto complementario, y al misma tiempo incluída de un modo muy elegante en la teoría general de la interpolación.*

Esta deducción del teorema de Taylor, que revela su gran relación con cuestiones muy sencillas, y en la que se realiza el paso al límite de un modo sumamente simple, me parece la mejor posible. Pero no todos los matemáticos que están familiarizados con estas consideraciones (las cuales son frecuentemente desconocidas, y sobre todo, probablemente, entre los autores de libros elementales de texto) piensan así; están acostumbrados a mirar con prejuicio adverso todo paso al límite, y prefieren, por ello, una demostración directa del teorema a este enlace con el Cálculo de diferencias.

Es de notar, sin embargo, en esta ocasión, que *el origen histórico del descubrimiento de la fórmula de Taylor fué realmente el Cálculo de diferencias*. Ya hemos mencionado que *Brock Taylor* fué el que expuso primero la fórmula que lleva su nombre en su obra *Methodus incrementorum* (1) deduciendo primero la fórmula de Newton, naturalmente sin el resto, y haciendo después que Δx tienda hacia cero al mismo tiempo que n crece infinitamente; de este modo, obtiene rigurosamente de los primeros términos de aquélla los primeros términos de su nueva serie:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1\,!} \frac{df(a)}{da} + \frac{(x-a)^2}{2\,!} \frac{d^2f(a)}{da^2} + \ldots,$$

pareciéndole, sin duda, evidente la continuación indefinida de la misma ley, sin entrar para nada en la consideración del resto, o en consideraciones acerca de la convergencia de la serie así formada. Ahora bien, en este proceso se efectúa un *paso al límite*

(1) Londini, 1715, págs. 21-23.

de una audacia extraordinaria. En los primeros términos, en los cuales, aparecen $x-a-\Delta x$, $x-a-2\Delta x$, ..., no hay ninguna dificultad, puesto que siendo lím $\Delta x=0$, estos múltiplos finitos de Δx también se anulan, naturalmente ; pero siguiendo más adelante, al crecer n aparecen términos que contienen los factores $x-a-k\Delta x$, donde k crece también más allá de todo límite, y no es lícito ya, sin un examen detenido, tratar estos términos como los primeros y deducir así que el desarrollo limitado se transforme en una serie convergente.

Taylor operaba, por lo tanto, en el fondo, con cantidades infinitamente pequeñas (diferenciales) de igual manera, sin duda, que lo hacían los leibnizianos. Es interesante señalar que a pesar de ser muy joven Taylor al hacer su descubrimiento, pues sólo contaba 29 años, y no obstante hallarse bajo la influencia de la propia persona de Newton, se apartó del método de límites de éste, y gracias a tal circunstancia, indudablemente, llegó a un descubrimiento de la mayor transcendencia en el campo del Análisis.

Una excelente exposición crítica de todo el proceso histórico de este teorema puede hallarla el lector en el trabajo de *Alfredo Pringsheim: «Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes»* (1).

Para terminar este asunto vamos a decir algo acerca de la *distinción corriente entre las series de Taylor y de Maclaurin.* Como es sabido, aparece en casi todos los libros el caso particular de la serie de Taylor correspondiente a ser $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)\ \ldots,$$

tratado independientemente como *serie de Maclaurin,* y podría alguien pensar que la distinción entre las dos series fuese algo muy importante. A poco que se conozca la cuestión se sabe que no hay ningún motivo matemático para tal distinción ; pero es menos conocido que *desde el punto de vista histórico esta separación carece de sentido.* La prioridad pertenece, indiscutiblemente, a Taylor con su teorema general deducido del modo antes indicado ; pero hay más, el propio Taylor hace notar en un

(1) Bibliotheca mathematica, serie III, tomo I (1900), pág. 433-479.

pasaje posterior de su libro (pág. 27) la forma particular de la serie cuando $a=0$, y observa que puede establecerse directamente con auxilio del método que hoy llamamos de los coeficientes indeterminados; y esta deducción es la que llevó a cabo *Maclaurin* en el año 1742, en su obra ya citada (pág. 464) *Treatise of fluxions* (1) nombrando expresamente a Taylor y sin pretender en lo más mínimo exponer con ello nada nuevo. Pero la cita ha pasado inadvertida probablemente, y al autor de este libro se le considera como autor del teorema, error que se produce con mucha frecuencia. Sólo más tarde se volvió de nuevo la atención a Taylor y, por lo menos, se dió su nombre a la forma general del teorema. Es muy difícil, cuando no imposible, luchar contra estos absurdos cuando están tan sólidamente arraigados; pero siempre cabe propagar la verdad, siquiera en el pequeño, círculo de las personas que se interesan por las cuestiones históricas.

3. Consideraciones históricas y pedagógicas acerca del Cálculo infinitesimal

Observemos, primeramente, que el lazo establecido por Taylor entre el Cálculo de diferencias y el de derivadas ha sido mantenido por largo tiempo. Todavía en los desarrollos analíticos de *Euler* van siempre emparejadas estas dos disciplinas y las fórmulas del Cálculo diferencial aparecen como casos límites de relaciones completamente elementales del Cálculo de diferencias. Este enlace tan natural desapareció con las definiciones puramente formales del Cálculo de derivadas de *Lagrange* al que repetidamente nos hemos referido, y así puede verse en una obra de carácter enciclopédico en la materia, de fines del siglo XVIII, escrita bajo la influencia de las ideas de Lagrange, y que abarcaba todos los resultados entonces conocidos del Cálculo infinitesimal, el *Traité du calcul différentiel et du calcul integral,* de *Lacroix*. Como muestra característica de esta obra, véase la definición que en ella se da de la derivada (tomo I, pág. 145): Una función, $f(x)$, está definida por una serie poten-

(1) Edinburgh, 1748, vol. II, pág. 610.

cial ; transformándola con auxilio del binomio de Newton se llega a la relación :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

pues bien, Lacroix designaba sencillamente por $df(x)$ el término de esta serie lineal en h, escribía dx en lugar de h, y tomaba como derivada, o cociente diferencial o, como él dice, *coeficiente diferencial:*

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Aparece así esta fórmula de un modo completamente extraño, al cual no puede asociarse concepto alguno. Mirada en esta forma la cuestión, naturalmente, no podía ya Lacroix tomar el Cálculo de diferencias como punto de partida ; pero le parecía, sin embargo, de tanta importancia para la práctica que no podía ser suprimido, y más adelante, en el tomo III de su obra, figura una exposición completamente independiente y muy circunstanciada, pero sin que pueda verse el camino que desde ella conduzca al Cálculo diferencial.

Este *Lacroix* «*grande*» tiene señalada importancia histórica como *manantial de muchas obras de Cálculo infinitesimal que aparecieron en el siglo* XIX : de las cuales es de citar en primer término, el más conocido como libro de Lacroix, el llamado *Lacroix* «*pequeño*» (1).

Desde el año 20 del siglo pasado aparecen influídos estos tratados de Cálculo no sólo por Lacroix, sino también por el método de los límites que predomina en las obras de *Cauchy*. Aparecen en primer término una serie de tratados franceses, destinados en su mayoría, como *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique,* para la enseñanza en esta Escuela. En ellos están basados también, directa o indirectamente, los libros alemanes, con la sola excepción, quizá, del de *Schlömilch*. De este gran número de libros sólo he de mencionar el de *Serret*, «*Cours de calcul différentiel et intégral*», publicado en París en 1869 y traducido en

(1) *Traité élémentaire du calcul differentiel et integral*; dos tomos. París, 1797.

1884 al alemán por *A. Harnack,* que constituye desde entonces una de las obras más extendidas para la enseñanza del Cálculo en Alemania. Como consecuencia de sucesivas refundiciones de autores distintos, aparecían en las ediciones alemanas algunas desigualdades, que se han hecho desaparecer en las ediciones posteriores a 1906 (1) cuidadosamente revisadas por *G. Scheffers,* de Charlottenburg, que ha devuelto a la obra la unidad perdida. Con gusto citamos por último un libro francés en tres tomos, el «*Cours d'analyse mathématique*» de Goursat (2), el cual en muchas cuestiones es mucho más completo que el *Serret* y contiena también, en particular, una gran serie de teorías y desarrollos completamente modernos; además está escrito en forma que hace agradable su lectura.

En todos estos libros modernos vuelven a referirse los conceptos de diferencial e integral al de límite; pero *generalmente* no se hace mención *del cálculo de diferencias ni de la interpolación;* se quiere ahora ver las cosas apurando el detalle, pero ello implica, como en el microscopio, una considerable reducción del campo de vista. Así, ahora se relega ordinariamente el Cálculo de diferencias como propio exclusivamente de los *calculadores prácticos* que tienen necesidad de aplicarlo, y en particular de los astrónomos, y el matemático suele no tener conocimiento alguno del mismo, cosa que es de esperar cambie (3).

Para terminar lo que se refiere al Cálculo infinitesimal, señalemos únicamente cuatro puntos *que distinguen nuestro criterio del corriente en los libros usuales:*

1.° *Exposición intuitiva de consideraciones abstractas por medio de representaciones gráficas* (curvas de aproximación en las series de Fourier y de Taylor).

2.° *Hacer resaltar el enlace entre las teorías próximas,* como con el Cálculo de diferencias y el de interpolación y, por último, también con las investigaciones de los filósofos.

---

(1) Serret-Scheffers: Lehrbuch der Difierential-und Integralrechnung, tomo I, 6.ª ed. Leipzig, 1915; t mo II, 6.ª-7.ª ed. 1921; tomo III, 5.ª ed. 1914.

(2) París, 1902-1907; tomo I, 3.ª ed. 1917; tomo II, 3.ª ed. 1918; tomo III, 2.ª ed. 1915.

(3) Merecen ser leídos: Markoff, *Differenzenrechnung,* Leipzig, 1896, y Nörlund, *Vorlesungen uber Differenzenrechnung,* Leipzig, 1924.

3.° *Dar importancia a la evolución histórica de los conocimientos científicos.*

4.° *Presentación de algunos ejemplos de libros populares para caracterizar la diferencia entre los conceptos del gran público, influídos por tales obras, y los de los matemáticos profesionales.*

A mí me parece de extraordinaria importancia que todo ello sea conocido de los aspirantes al magisterio secundario; pues al llegar a la práctica de la enseñanza tropezarán con que los conceptos de los alumnos son aquellos vulgares, y si no conocen bien los Elementos intuitivos de la Matemática así como las relaciones vivas entre las distintas ramas de ésta y entre ella y las demás ciencias, y, sobre todo, si no conocen el desarrollo histórico, les fallará siempre el terreno en que pisen, y una de dos: volverán su atención al campo de la Matemática pura más moderna y no serán entendidos por sus discípulos, ó sucumbirán en la lucha, olvidando cuanto aprendieron en los cursos superiores y cayendo en la rutina de siempre. Precisamente en el campo del Cálculo infinitesimal es donde la discontinuidad en la enseñanza alcanza un grado máximo, como repetidamente hemos dicho; yo confío que estas lecciones contribuirán a hacer desaparecer esa discontinuidad y serán útiles a los futuros profesores en la práctica de la enseñanza.

Con esto terminamos realmente nuestras lecciones sobre Análisis y vamos, a modo de apéndice, a hablar algo acerca de algunas *Teorías de la Matemática moderna,* a las que incidentalmente nos hemos referido ya antes, y sobre las que conviene que todos los profesores estén regularmente orientados.